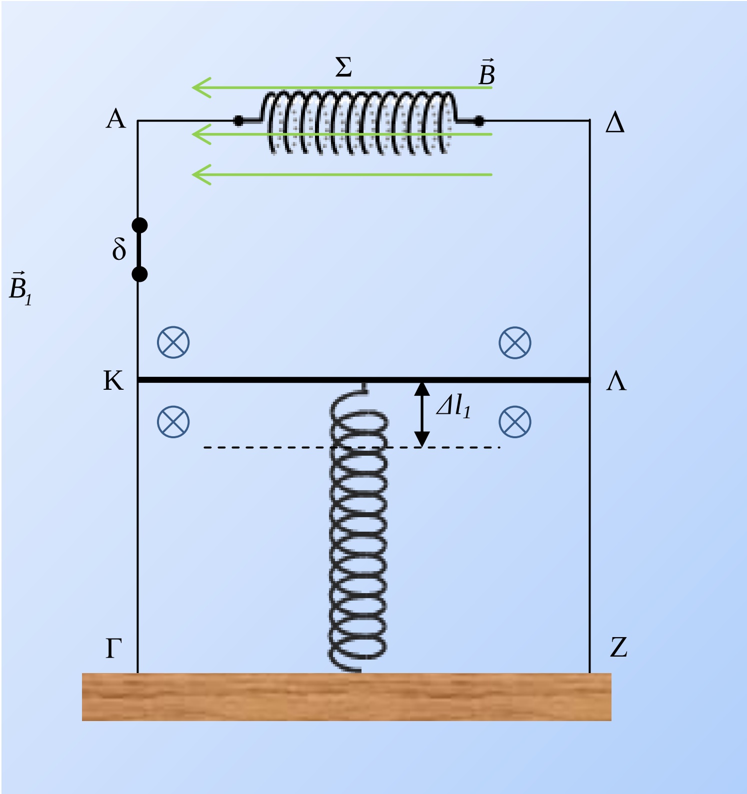
1) Το οριζόντιο αριστερόστροφο σωληνοειδές Σ του σχήματος, έχει *N* σπείρες αντίσταση *R* και βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ κάθετης στο επίπεδο κάθε σπείρας, με κατεύθυνση αριστερά και μεταβλητού μέτρου *B*. Στα κατακόρυφα σύρματα ΑΓ και ΔΖ, μηδενικής αντίστασης, έχει τα άκρα του ένας ευθύγραμμος οριζόντιος αγωγός ΚΛ, που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, πάντα σε επαφή με αυτά, κλείνοντας το κύκλωμα. Ο αγωγός αυτός έχει μάζα *m*, μήκος *l* αμελητέα εσωτερική αντίσταση και ισορροπεί έχοντας στο μέσον του στερεωμένο το ένα άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς *D* το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο έδαφος. Στη θέση αυτή, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι Δl_1. Στην περιοχή που βρίσκεται ο αγωγός, δημιουργούμε ένα οριζόντιο χρονικά σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_1$, με κατεύθυνση προς τη σελίδα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g και ότι τα σημεία Γ και Ζ ανήκουν σε ξύλινο δάπεδο.



i) Το μέτρο *B* αυξάνεται ή μειώνεται; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

ii) Αν το μέτρο *B* αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση $B = k \cdot t$ με $k > 0$, η επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι

α) $|\Delta l_1| = \dfrac{B_1 \cdot N \cdot S \cdot k \cdot l + mgR}{R \cdot D}$ β) $|\Delta l_1| = \dfrac{B_1 \cdot N \cdot S \cdot k \cdot l - mgR}{R \cdot D}$

γ) $|\Delta l_1| = \dfrac{B_1 \cdot N \cdot S \cdot k \cdot l - mgR}{2R \cdot D}$

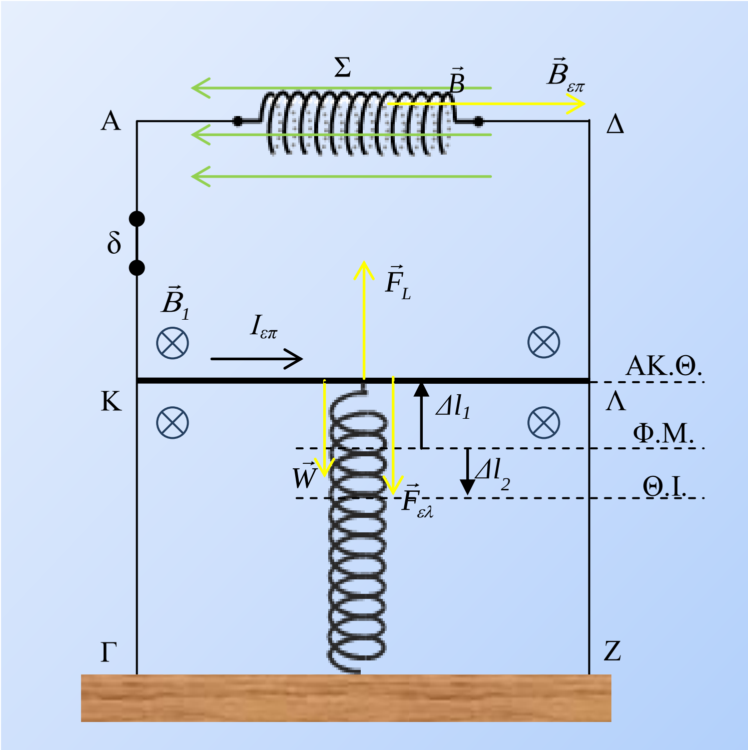
iii) Αν ανοίξουμε το διακόπτη δ, ο αγωγός εκτελεί α.α.τ. Η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει ο αγωγός θα είναι

α) $\upsilon_{max} = \sqrt{\dfrac{D}{m}} \cdot \dfrac{B_1 \cdot N \cdot S \cdot k \cdot l}{R \cdot D}$ β) $\upsilon_{max} = \sqrt{\dfrac{D}{m}} \cdot \dfrac{B_1 \cdot N \cdot S \cdot k \cdot l + mgR}{R \cdot D}$

γ) $\upsilon_{max} = \sqrt{\dfrac{D}{m}} \cdot \dfrac{B_1 \cdot N \cdot S \cdot k \cdot l - mgR}{R \cdot D}$

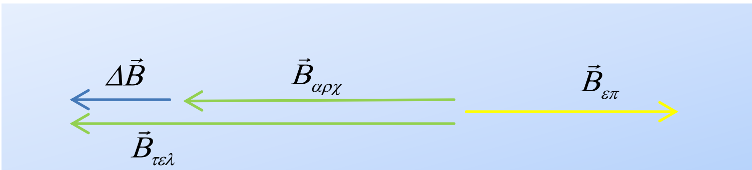
Απάντηση

i) Ο αγωγός δέχεται το βάρος του και τη δύναμη του ελατηρίου με φορά προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Άρα θα πρέπει να δέχεται και από το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_1$ μια δύναμη Laplace με φορά προς τα πάνω. Τότε όμως πρέπει να διαρρέεται από ρεύμα, το οποίο με βάση τον κανόνα των τριών δαχτύλων, θα έχει φορά προς τα δεξιά, από το Κ στο Λ. Ναι αλλά που βρίσκεται η πηγή; Προφανώς το σωληνοειδές είναι πηγή ΗΕΔ επαγωγής αφού μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από αυτό. Το επαγωγικό ρεύμα λοιπόν διαρρέει το σωληνοειδές από το Δ προς το Α και δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_{\varepsilon\pi}$ του σχήματος 1.



σχήμα 1

Ο κανόνας Lenz μας λέει ότι το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_{επ}$ θα έχει φορά τέτοια ώστε να αντιστέκεται στην αιτία που το προκαλεί, δηλαδή στη μεταβολή του $\vec{B}$. Πρέπει δηλαδή το διάνυσμα $\Delta\vec{B}$ να είναι αντίρροπο του $\vec{B}_{επ}$.Όπως βλέπουμε στο σχήμα 2, αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το μέτρο του $\vec{B}$ **αυξάνεται.**



σχήμα 2

ii) Η ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται στο πηνίο, από το νόμο Faraday είναι απολύτως:

$$|E_{επ}| = \left|-N\frac{d\Phi}{dt}\right| = -N\left|\frac{d(B\cdot S\cdot συν0)}{dt}\right| = N\cdot S\cdot\left|\frac{dB}{dt}\right| = N\cdot S\cdot k \;\;(1)$$

Το επαγωγικό ρεύμα θα είναι $I_{επ} = \frac{|E_{επ}|}{R} \xrightarrow{(1)} I_{επ} = \frac{N\cdot S\cdot k}{R} \;\;(2)$

Η δύναμη Laplace έχει μέτρο $F_L = B_1\cdot I_{επ}\cdot l \xrightarrow{(2)} F_L = B_1\cdot\frac{N\cdot S\cdot k}{R}\cdot l \;\;(3)$

Ο αγωγός ισορροπεί:

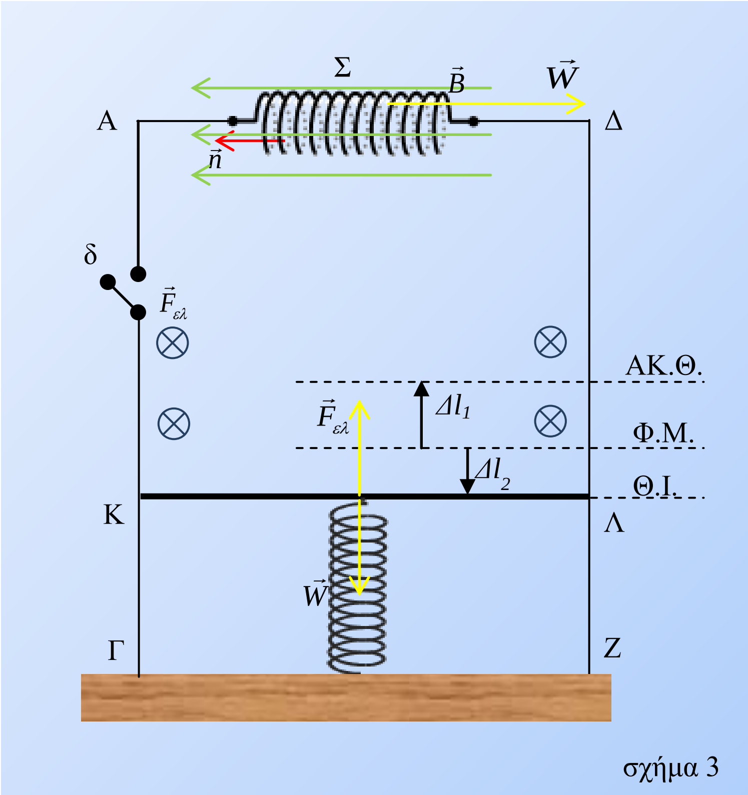
$$\Sigma\vec{F} = 0 \Leftrightarrow F_L - W - |F_{ελ}| = 0 \Leftrightarrow |F_{ελ}| = F_L - W \xrightarrow{(3)} D\cdot|\Delta l_1| = B_1\cdot\frac{N\cdot S\cdot k}{R}\cdot l - mg \Leftrightarrow$$

$$|\Delta l_1| = \frac{B_1\cdot N\cdot S\cdot k\cdot l - mgR}{R\cdot D} \;\;(4)$$

Σωστή απάντηση → β

iii) Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης θα βρίσκεται κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά Δl_2, όπως φαίνεται στο σχήμα 3, όπου:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Leftrightarrow |F_{ελ}| = W \Leftrightarrow D\cdot|\Delta l_2| = mg \Leftrightarrow |\Delta l_2| = \frac{mg}{D} \;\;(5)$$



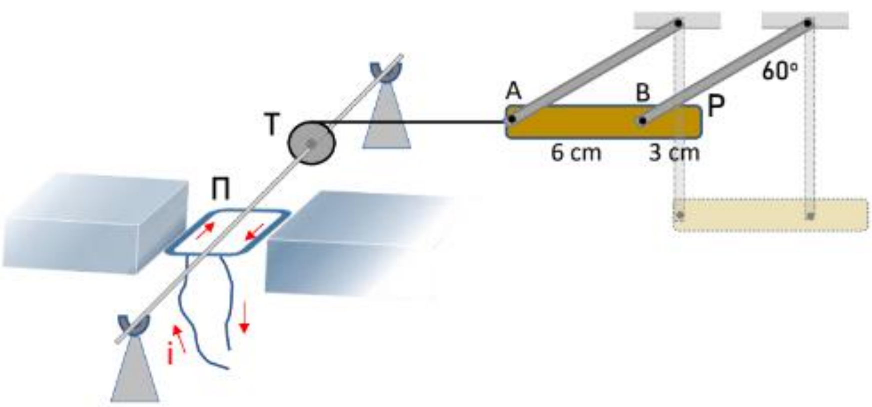
Η ταλάντωση θα ξεκινήσει από την άνω ακραία θέση, άρα το πλάτος θα είναι

$$A = |\Delta l_1| + |\Delta l_2| \xrightarrow{(4),(5)} A = \frac{B_1 \cdot N \cdot S \cdot k \cdot l - mgR}{R \cdot D} + \frac{mg}{D} \Leftrightarrow A = \frac{B_1 \cdot N \cdot S \cdot k \cdot l}{R \cdot D}$$

άρα η μέγιστη ταχύτητα θα έχει μέτρο $\upsilon_{max} = \omega \cdot A \Leftrightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \frac{B_1 \cdot N \cdot S \cdot k \cdot l}{R \cdot D}$

Σωστή απάντηση → α

2)



Το ορθογώνιο πλαίσιο Π του σχήματος είναι τοποθετημένο παράλληλα προς τις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης 0,2 T, ανάμεσα σε δύο ισχυρούς μαγνήτες.

Αποτελείται από n = 60 σπείρες συνολικής ωμικής αντίστασης R = 0,5 Ω και με διαστάσεις α = 6 cm μήκος και β = 4 cm πλάτος. Οι ακροδέκτες του, συνδέονται με ηλεκτρική πηγή τάσης 10 V και διαρρέεται από ρεύμα έντασης i.

Το πλαίσιο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα από μονωτικό υλικό στον οποίο είναι στερεωμένη μια τροχαλία ακτίνας r = √3 cm. Γύρω από αυτήν είναι τυλιγμένο ένα αβαρές νήμα, που είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιας ομογενούς ράβδου Ρ μάζας m και μήκους L = 9 cm. Η ράβδος Ρ είναι αρθρωμένη στο αριστερό της άκρο Α και στη θέση Β με δύο παράλληλες, αμελητέας μάζας, ράβδους μήκους ℓ = 0,1 m, οι οποίες, στην κατάσταση ισορροπίας που περιγράφεται στο σχήμα, έχουν εκτραπεί κατά 60^{o} από την κατακόρυφο.

Α. Δεδομένου ότι το σύστημα πλαίσιο – ράβδος ισορροπεί:

α. Να χαρακτηρίσετε τους πόλους των δύο μαγνητών.

β. Να βρείτε τη ροπή των δυνάμεων πάνω στο πλαίσιο.

γ. Να υπολογίσετε τη μάζα m της ράβδου Ρ.

Β. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα.

α. Να βρείτε τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα των παράλληλων ράβδων και της ράβδου Ρ. Τριβές αμελητέες.

β. Δείξτε ότι ο λόγος F_1/F_2 των μέτρων των δυνάμεων που ασκούν οι παράλληλοι ράβδοι στη ράβδο Ρ, είναι ανεξάρτητος από τη θέση της και υπολογίστε τον.

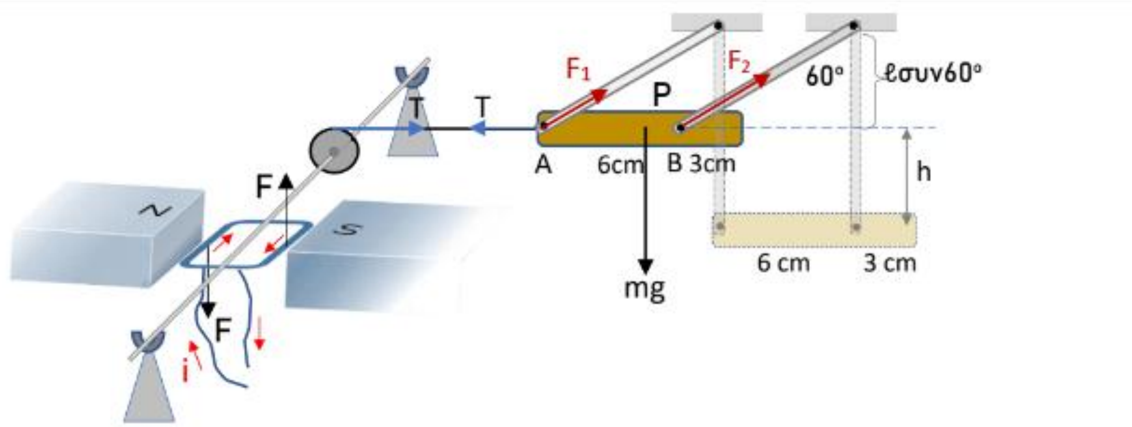
Γ. Στην έναρξη της κίνησης της ράβδου Ρ να βρείτε:

α. Τα μέτρα των δυνάμεων F_1 και F_2.

β. Τη γωνιακή επιτάχυνση των παράλληλων ράβδων.

Δίνεται g = 10 m/s^2.

Απάντηση:



Α. α) Έτσι που είναι προσανατολισμένο το πλαίσιο, το μαγνητικό πεδίο ασκεί ζεύγος κατακόρυφων δυνάμεων, μια στην αριστερή και μια στη δεξιά πλευρά του (οι άλλες δύο πλευρές δεν δέχονται δυνάμεις, γιατί το ρεύμα τους είναι παράλληλο προς τις δυναμικές γραμμές).

Επειδή η ροπή του νήματος πάνω στην τροχαλία τείνει να στρέψει το πλαίσιο δεξιόστροφα, (όπως κοιτάζουμε το σχήμα) η ροπή των δυνάμεων Laplace πάνω του πρέπει να είναι αριστερόστροφη. Δηλαδή η αριστερή του πλευρά να δέχεται μια κατακόρυφη δύναμη F με φορά προς τα κάτω και η δεξιά του μια κατακόρυφη δύναμη F με φορά προς τα πάνω. Με εφαρμογή του κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι το μαγνητικό πεδίο έχει φορά από αριστερά προς τα δεξιά. Άρα ο πόλος του αριστερού μαγνήτη, που βρίσκεται δίπλα στο πλαίσιο, είναι βόρειος και του δεξιού νότιος.

β) Είναι:

$$\tau_\zeta = F\cdot\beta = nBi\alpha\cdot\beta = nB\frac{v}{R}\alpha\beta$$

$$=60\cdot(0{,}2\,T)\frac{(10\,v)}{(0{,}5\,\Omega)}(0{,}06\,m)(0{,}04\,m)$$

$$= 0{,}576\ N\cdot m$$

γ. Από την ισορροπία του πλαισίου: $\tau_\zeta = \tau_T \rightarrow \tau_\zeta = T\cdot r$ (1)

Από την ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow (F_1 + F_2)\sigma\upsilon\nu 30^o = T \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow (F_1 + F_2)\eta\mu 30^o = mg \qquad (3)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (2) και (3) προκύπτει $T = mg\sigma\varphi 30^o$ και άρα από την (1):

$$\tau_\zeta = mg\sigma\varphi 30^o r$$

$$\Rightarrow 0{,}576\ N\cdot m = M(10 m/s^2)\sqrt{3}(0{,}01\sqrt{3}\,m)$$

$$\Rightarrow M=1{,}92\ kg$$

Β. α) Η ράβδος Ρ αποκτά μέγιστη κινητική ενέργεια (άρα και ταχύτητα) στη θέση που η δυναμική της ενέργεια γίνεται ελάχιστη, δηλαδή στην κατώτερη θέση της. Η κατακόρυφη απόσταση της θέσης αυτής από την αρχική θέση είναι ίση με:

$$h = \ell - \ell\sigma\upsilon\nu 60^o = \ell/2 = 0{,}05\ m$$

Αφού δεν υπάρχουν τριβές, η μηχανική ενέργεια του συστήματος των τριών ράβδων διατηρείται σταθερή, άρα:

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gh} = 1\ m/s$$

Η ράβδος Ρ εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση, γιατί μετατοπίζεται παράλληλα προς την αρχική της θέση. Άρα η γωνιακή της ταχύτητα είναι μηδέν.

Όλα τη σημεία της έχουν ταχύτητα 1 m/s, όταν διέρχεται από την κατώτερη θέση της. Την ίδια ταχύτητα έχουν και τα κάτω άκρα των παράλληλων ράβδων. Οι ράβδοι εκτελούν στροφική κίνηση, άρα διέρχονται από την κατακόρυφη θέση τους με γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \upsilon/\ell = 10\ r/s$$

Αυτή είναι και η μέγιστη γωνιακή τους ταχύτητα.

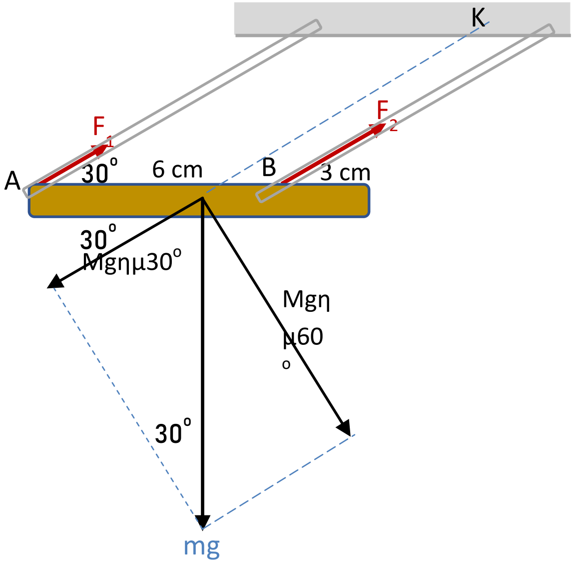
β) Αφού η ράβδος εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση, θα είναι κάθε στιγμή Στ = 0 ως προς οποιοδήποτε σημείο της. Επιλέγουμε το κέντρο μάζας της, το οποίο απέχει L/2 = 4,5 cm από το σημείο εφαρμογής Α της F_1 και L/2 – 3cm = 1,5 cm από το σημείο εφαρμογής Β της F_2.

Σε μια τυχαία θέση όπου οι παράλληλοι ράβδοι σχηματίζουν γωνία φ με την κατακόρυφο θα είναι:

$$\Sigma\tau_{(cm)} = 0 \Rightarrow F_1\sigma\upsilon\nu\varphi(4{,}5\,cm) = F_2\sigma\upsilon\nu\varphi(1{,}5\,cm)$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{3} \qquad (4)$$

Είναι φανερό ότι ο λόγος των δυνάμεων είναι ανεξάρτητος της γωνίας φ. Εξαρτάται μόνο από τις θέσεις Α και Β συναρμογής των ράβδων.



Γ. α) Επειδή η ράβδος Ρ εκτελεί μεταφορική μόνο κίνηση, μπορούμε να περιγράψουμε την κίνησή της θεωρώντας ότι όλες οι δυνάμεις ενεργούν πάνω στο κέντρο μάζας της. Αυτό, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος, αρχίζει να διαγράφει κυκλικό τόξο με κέντρο το Κ και ακτίνα ℓ. Η αρχική του ταχύτητα είναι μηδέν, άρα και η κεντρομόλος δύναμη. Στην έναρξη δηλαδή της κίνησης της ράβδου Ρ ισχύει:

$F_1 + F_2 - Mg\eta\mu30^o = 0$

→ $F_1 + F_2 = 9{,}6\ N$

→ $F_1 + 3F_1 = 9{,}6\ N$

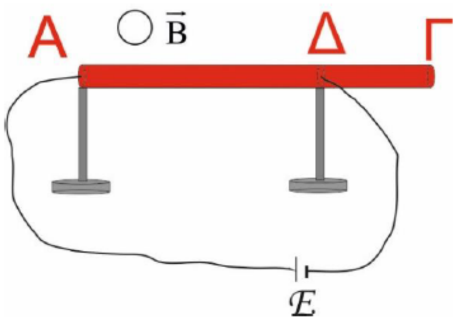
Τελικά: $F_1 = 2{,}4\ N$ και $F_2 = 7{,}2\ N$

β) Το κέντρο μάζας της ράβδου ξεκινά με επιτάχυνση $\alpha = \Sigma F/M = g\eta\mu60^o$. Αφού η κίνησή της είναι μόνο μεταφορική, όλα τα σημεία της, άρα και τα άκρα των παράλληλων ράβδων, έχουν την ίδια επιτάχυνση. Οι ράβδοι αυτές κάνουν στροφική κίνηση, άρα η αρχική τους γωνιακή επιτάχυνση είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha}{\ell} = \frac{g}{\ell}\eta\mu60^o = 50\sqrt{3}\ r/s^2$$

3)

Ευθύγραμμος αγωγός ΑΓ μήκους L, μάζας m και βάρους w ισορροπεί ευρισκόμενος πάνω σε δύο στηρίγματα στα σημεία Α και Δ (ΑΔ = 2L/3). Ο αγωγός βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο σταθερής έντασης Β. Η φορά της έντασής του μαγνητικού πεδίου δεν είναι γνωστή.



Ο αγωγός με τη βοήθεια μιας ιδανικής πηγής διαρρέεται από ρεύμα σταθερή έντασης Ι και είναι οριακά έτοιμος να ανατραπεί.

Α. Η φορά της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι:

Α1. Από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Α2. Από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Β. Το μέτρο της δύναμης Laplace είναι ίσο με:

Β1. w. **Β2 . 2w** **Β3. w/2.** **Β4. w/3.**

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

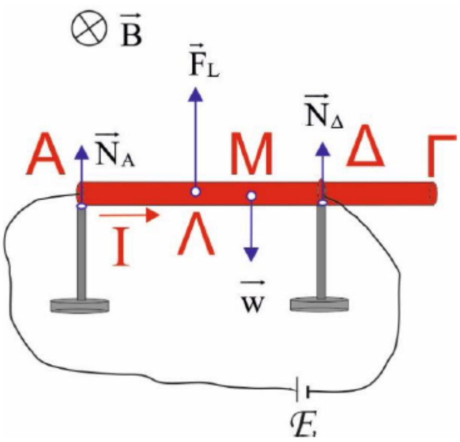
Γ. Η μέγιστη τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου για να μην ανατρέπεται ο αγωγός είναι ίση με:

Γ1. $B_{max} = \frac{mg}{IL}$ **Γ2.** $B_{max} = \frac{mg}{2IL}$ **Γ3.** $B_{max} = \frac{mg}{3IL}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Α. Στον αγωγό από τη χρονική στιγμή που του διαβιβάζεται ρεύμα και μετά ασκούνται το βάρος του $\vec{w}$, οι κάθετες δυνάμεις στήριξης από τα δύο στηρίγματα $\vec{N}_A$ και $\vec{N}_\Delta$ η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$. Η δύναμη Laplace, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, θα έχει κατακόρυφη διεύθυνση. Αφού η ράβδος είναι οριακά έτοιμη να ανατραπεί, η δύναμη Laplace θα πρέπει να έχει φορά προς τα πάνω, και για να συμβεί αυτό, με δεδομένη τη φορά του ρεύματος, με εφαρμογή του κανόνα του δεξιού χεριού προκύπτει ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου θα έχει **φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.** Επομένως **σωστή απάντηση είναι η Α1.**



β. Εφόσον ο αγωγός ισορροπεί θα ισχύει:

$$\Sigma\tau(\Delta)=0 \Rightarrow \vec{\tau}_{F_L}+\vec{\tau}_w+\vec{\tau}_{N_A}+\vec{\tau}_{N_\Delta}=0 \Rightarrow F_L\cdot(\Lambda\Delta)-w\cdot(M\Delta)+N_A\cdot(A\Delta)=0\,(1)$$

Για τις αποστάσεις ισχύουν:

$$\Lambda\Delta=\frac{A\Delta}{2}=\frac{\frac{2L}{3}}{2}=\frac{L}{3}, \qquad M\Delta=M\Gamma-\Gamma\Delta=\frac{L}{2}-\frac{L}{3}=\frac{L}{6}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) και αφού ο αγωγός δεν ανατρέπεται οριακά ΝΑ = 0, προκύπτει:

$$F_L\cdot\frac{L}{3}-w\cdot\frac{L}{6}=0 \Rightarrow F_L=\frac{w}{2}$$

Επομένως **σωστή απάντηση είναι η Β3.**

γ. Για να μην ανατρέπεται ο αγωγός θα πρέπει $N_A \geq 0$.

Σύμφωνα λοιπόν με τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F_L\cdot\frac{L}{3}-w\cdot\frac{L}{6}+N_A\cdot\frac{2L}{3}=0 \Rightarrow 2N_A=\frac{w}{2}-F_L \Rightarrow N_A=\frac{w-2F_L}{4}$$

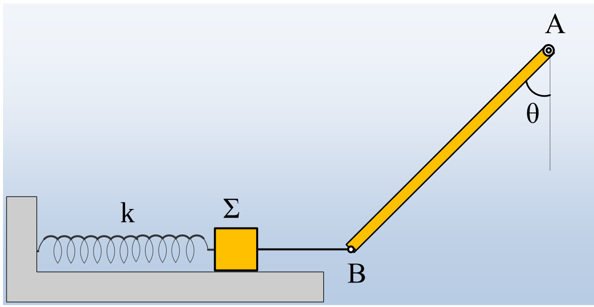
Όμως: $N_A \geq 0 \Rightarrow \frac{w-2F_L}{4}\geq 0 \Rightarrow w \geq 2F_L \Rightarrow mg \geq 2BIL \Rightarrow B \leq \frac{mg}{2IL}$

Επομένως η μέγιστη τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου για να μην υπάρχει ανατροπή του αγωγού είναι ίση με:

$$B_{max}=\frac{mg}{2IL}$$

Επομένως **σωστή απάντηση είναι η Γ2.**

4) Ένα σώμα Σ μάζας m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, ενώ συνδέεται μέσω οριζόντιου αβαρούς νήματος με το άκρο Β μιας ομογενούς ράβδου ΑΒ. Η ράβδος έχει μάζα Μ=2m, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Α και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία θ=45° με την κατακόρυφη διεύθυνση, όπως στο σχήμα.



i) Η τάση του νήματος έχει μέτρο:

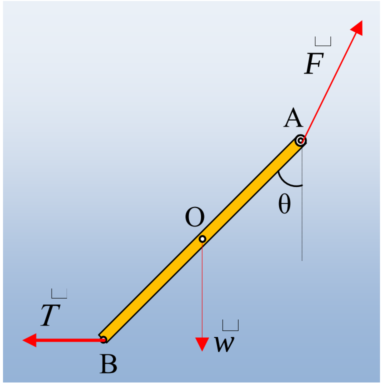
α) T= ½ mg, β) T= mg, γ) T=2mg

ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Η ενέργεια ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει το σώμα Σ είναι ίση:

$$α)\quad E=\frac{m^2g^2}{2k},\qquad β)\quad E=\frac{m^2g^2}{k},\qquad γ)\quad E=\frac{2m^2g^2}{k}.$$

Απάντηση:

i) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπως στο διπλανό σχήμα. Από την συνθήκη ισορροπίας της ράβδου παίρνουμε:



ΣF=0 και Στ=0

Παίρνουμε τις ροπές ως προς το άκρο A και έστω ℓ το μήκος της ράβδου:

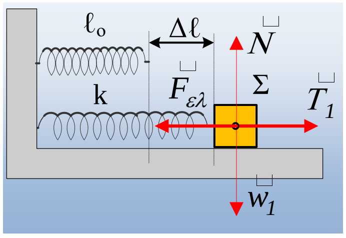
$$w\cdot\frac{l}{2}\cdot ημθ - T\cdot l\cdot συνθ = 0$$

Αλλά ημ45°=συν45°, οπότε παίρνουμε:

$$T=\frac{1}{2}w=\frac{1}{2}Mg=\frac{1}{2}2mg=mg$$

Σωστό το β).

ii) Παίρνουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, πριν το κόψιμο του νήματος, οπότε και ισορροπούσε.



$ΣF=0$ ή $ΣF_x=0 \rightarrow F_{ελ}=T_1=T \rightarrow$

$$Δl=\frac{T}{k}=\frac{mg}{k}$$

Αλλά μόλις κοπεί το νήμα, το σώμα θα αρχίσει να ταλαντώνεται γύρω από την θέση ισορροπίας, η οποία είναι και η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, ξεκινώντας από θέση πλάτους ($υ_{αρχ}=0$), οπότε Α=Δℓ.

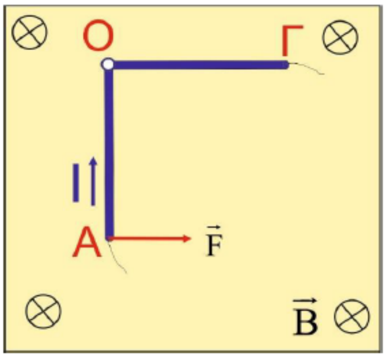
Τότε η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι ίση:

$$E=\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=\frac{m^2g^2}{2k}$$

Σωστό το α).

5)

Ομογενής αγωγός ΑΟΓ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο. Τα δύο τμήματα του αγωγού έχουν ίδια μάζα Μ και ίδιο μήκος L. Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I με κατεύθυνση από το Α προς το Γ. Στο χώρο που βρίσκεται ο αγωγός υπάρχει οριζόντιο μαγνητικό πεδίο έντασης Β, του οποίου η κατεύθυνση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι ο αγωγός ΑΟΓ ισορροπεί με το τμήμα του ΟΑ να έχει κατακόρυφη διεύθυνση.



Α. Αν αυξήσουμε την ένταση του ρεύματος, ο αγωγός ΑΟΓ:

Α1. Θα εξακολουθεί να ισορροπεί.

Α2. Θα αρχίσει να στρέφεται δεξιόστροφα.

Α3. Θα αρχίσει να στρέφεται αριστερόστροφα.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Β. Αν αντιστρέψουμε ακαριαία τη φορά του ρεύματος, ο αγωγός ΑΟΓ:

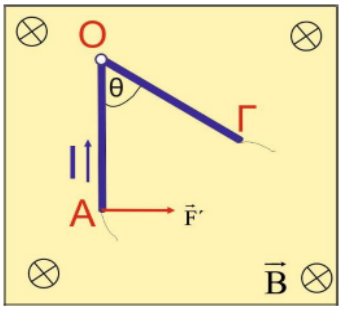
Β1. Θα εξακολουθεί να ισορροπεί.

Β2. Θα αρχίσει να στρέφεται δεξιόστροφα.

Β3. Θα αρχίσει να στρέφεται αριστερόστροφα.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ. Αν το τμήμα ΟΓ του αγωγού σχημάτιζε γωνία θ με το τμήμα ΑΟ του αγωγού, τότε για την ισορροπία αγωγού η δύναμη F΄:



Γ1. θα ήταν ανεξάρτητη από την ένταση του ρεύματος αλλά θα επηρεαζόταν από την ένταση του μαγνητικού πεδίου.

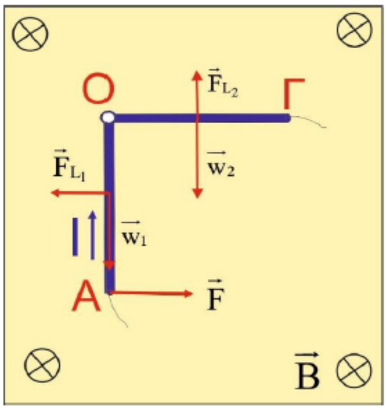
Γ2. θα ήταν ανεξάρτητη από την ένταση του μαγνητικού πεδίου αλλά θα επηρεαζόταν από την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος.

Γ3. θα ήταν ανεξάρτητη και από την ένταση του μαγνητικού πεδίου αλλά και από την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Α. Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα, οι δυνάμεις που του ασκούνται είναι τα δύο βάρη των τμημάτων του αγωγού, η δύναμη από τον άξονα (η δύναμη από τον άξονα δεν είναι σχεδιασμένη στο σχήμα) και οι δύο δυνάμεις Laplace, αφού ο αγωγός βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο.



Η κατεύθυνση των δυνάμεων Laplace είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα, όπως προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Για τα μέτρα των δυνάμεων Laplace σε κάθε τμήμα του αγωγού ισχύει:

$$F_{L_1} = F_{L_2} = BIL$$

Όπως παρατηρούμε από το σχήμα, οι δύο δυνάμεις Laplace προκαλούν στον αγωγό δύο αντίθετες ροπές που ΄΄εξουδετερώνονται΄΄ μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι στην ισορροπία του αγωγού και σύμφωνα με τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το Ο θα ισχύει:

$$\Sigma\tau(O) = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{F_{L_1}} + \vec{\tau}_{w_1} + \vec{\tau}_{F_{L_2}} + \vec{\tau}_{w_2} + \vec{\tau}_{F} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -F_L \cdot \frac{L}{2} + 0 + F_L \cdot \frac{L}{2} - w_2 \cdot \frac{L}{2} + F \cdot L = 0 \Rightarrow F = \frac{w_2}{2} \quad (1)$$

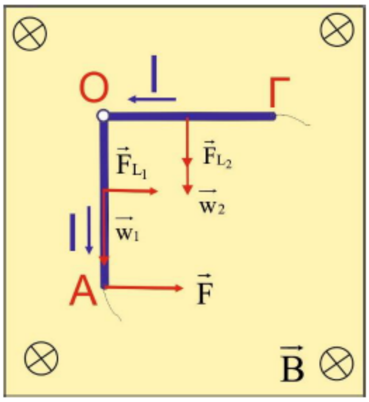
Επομένως η δύναμη F που απαιτείται για την ισορροπία είναι ανεξάρτητη από τη δύναμη Laplace και κατά συνέπεια και ανεξάρτητη από την ένταση του ρεύματος.

Έτσι, ακόμη και αν αυξηθεί το ρεύμα θα απαιτείται ίδιου μέτρου δύναμη.

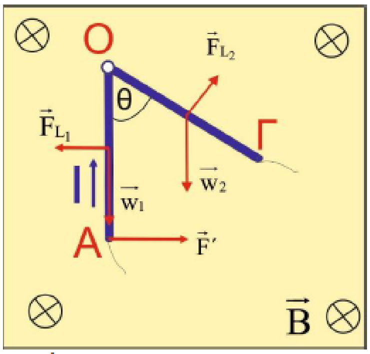
Άρα **σωστή απάντηση είναι η Α1.**

Β. Αντιστρέφοντας τη φορά του ρεύματος, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού αντιστρέφονται οι κατευθύνσεις των δυνάμεων Laplace.

Και πάλι όμως, όπως παρατηρούμε από το σχήμα, οι δύο δυνάμεις Laplace προκαλούν στον αγωγό δύο αντίθετες ροπές που ΄΄εξουδετερώνονται΄΄ μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι αφού F = Mg/2 ο αγωγός θα εξακολουθεί να ισορροπεί.



Άρα **σωστή απάντηση είναι η Β1.**



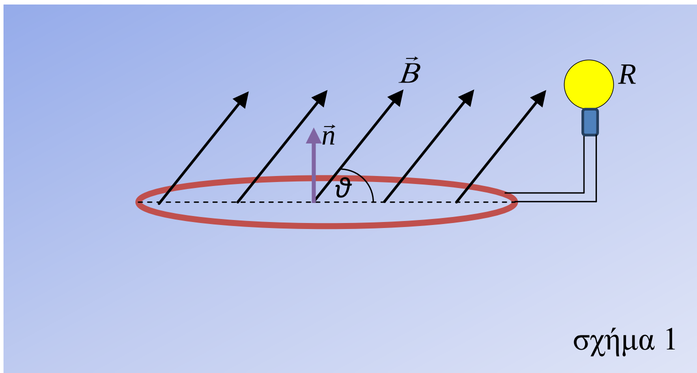
Γ. Αν το τμήμα ΟΓ του αγωγού σχημάτιζε γωνία θ με το τμήμα ΑΟ του αγωγού, τότε θα άλλαζε, σύμφωνα με την κανόνα του δεξιού χεριού η κατεύθυνση της δύναμης Laplace.

Και πάλι όμως, όπως παρατηρούμε από το σχήμα, οι δύο δυνάμεις Laplace προκαλούν στον αγωγό δύο αντίθετες ροπές που ΄΄εξουδετερώνονται΄΄ μεταξύ τους.

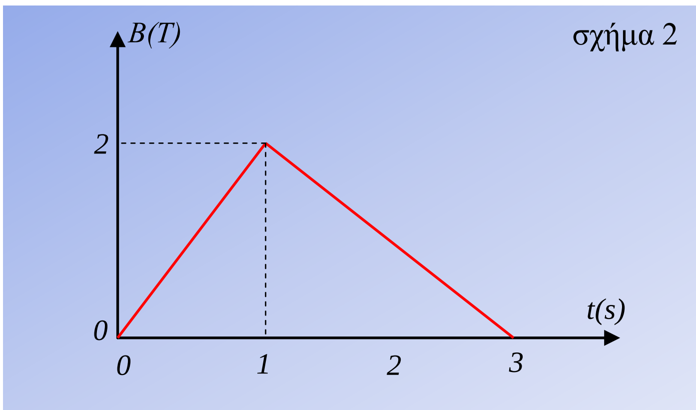
Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη F΄ δεν θα επηρεαζόταν καθόλου από την ένταση του μαγνητικού πεδίο και από την ένταση του ρεύματος που θα διέρρεε τον αγωγό.

Επομένως **σωστή απάντηση είναι η Γ3.**

6) Χρησιμοποιώντας λεπτό σύρμα, φτιάχνουμε ένα κυκλικό στεφάνι αμελητέου πάχους, με *N = 10σπείρες* και ακτίνα $r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} m$. Το σύρμα έχει αντίσταση ανά μονάδα μήκους $R^* = \frac{0,5}{\sqrt{\pi}} \Omega / m$. Στα άκρα του συνδέουμε λαμπτήρα αντίστασης *R = 80Ω*, ο οποίος όταν λειτουργεί κανονικά αποδίδει θερμική ισχύ *P = 51,2W*. Ενεργοποιούμε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, ώστε οι δυναμικές γραμμές να διέρχονται από όλη την επιφάνεια του στεφανιού, σχηματίζοντας γωνία $\vartheta = 53^0$, με αυτήν, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται στη συνέχεια σύμφωνα με τη γραφική παράσταση του σχήματος 2. Το στεφάνι παραμένει ακίνητο, το εμβαδικό διάνυσμα $\vec{n}$ έχει τη φορά του σχήματος 1 και δίνεται $ημ53^0 = 0,8$ και το τμήμα του κυκλώματος εκτός της στεφάνης δεν επηρεάζει το επαγωγικό φαινόμενο.



σχήμα 1



σχήμα 2

α) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της μαγνητικής ροής που διέρχεται από την επιφάνεια μίας σπείρας του στεφανιού.

β) Να βρείτε τη χρονική εξέλιξη της ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο στεφάνι και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες. Θα χαρακτηρίζατε την παραγόμενη ΗΕΔ ως συνεχή ή εναλλασσόμενη;

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα και να υπολογίσετε την ενεργό τιμή της.

δ) Να εξετάσετε αν ο λαμπτήρας λειτουργεί κανονικά.

ε) Βρείτε το ηλεκτρικό φορτίο που θα περάσει από μια διατομή του κυκλώματος αλγεβρικά με βάση τη φορά του ρεύματος και το κατά απόλυτη τιμή ηλεκτρικό φορτίο που θα διακινηθεί ανεξάρτητα της φοράς του ρεύματος. Ποιο από τα δύο μας δίνει ο νόμος Newman αν εφαρμοστεί για όλο το χρονικό διάστημα των *3s*;

στ) Κοιτώντας το στεφάνι από ψηλά (κάτοψη), σχεδιάστε και δικαιολογείστε τη φορά του επαγωγικού ρεύματος.

Απάντηση

α) Η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει γραμμική μεταβολή, αλλά είναι δίκλαδη συνάρτηση του χρόνου:

Από $0s \le t \le 1s$ έστω ότι η συνάρτηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι

$$B = at + b$$

Τα ζεύγη $(0,0)$, $(1,2)$ την επαληθεύουν, άρα:

$$0 = a\cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 0$$
$$2 = a\cdot 1 + 0 \Leftrightarrow a = 2T/s$$

Επομένως η (1) δίνει $B = 2t$ (S.I.) (1)

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από μία σπείρα θα είναι

$$\Phi = B\cdot A\cdot \sigma\upsilon\nu(90-\theta) = B\cdot \pi r^2 \cdot \eta\mu\theta \xrightarrow{(1)} \Phi = 2\cdot t\cdot \pi\cdot \frac{4}{\pi}\cdot 0{,}8 \Leftrightarrow$$

$\boxed{\Phi = 6{,}4\cdot t}$ (S.I.) (3)

Από $1s \le t \le 3s$ έστω ότι η συνάρτηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι

$$B = ct + d$$

Τα ζεύγη $(1,2)$, $(3,0)$ την επαληθεύουν, άρα:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = a\cdot 1 + b \\ 0 = a\cdot 3 + b \end{array}\right| \rightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1T/s,\ b = 3T/S$$

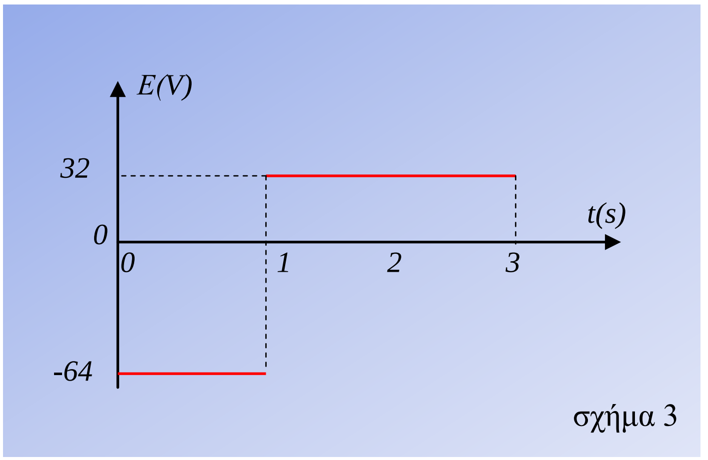
Επομένως η (1) δίνει $B = -t + 3$ (S.I.) (2)

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από μία σπείρα θα είναι

$$\Phi = B\cdot A\cdot \sigma\upsilon\nu(90-\theta) = B\cdot \pi r^2 \cdot \eta\mu\theta \xrightarrow{(2)} \Phi = (-t+3)\cdot \pi\frac{4}{\pi}\cdot 0{,}8 \Leftrightarrow$$

$\boxed{\Phi = -3{,}2t + 9{,}6}$ (S.I.) (4)

β) Από $0s \le t \le 1s$



$$E = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \xrightarrow{(3)}$$

$$E = -10 \cdot \frac{d(6{,}4t)}{dt} \Leftrightarrow$$

$$E = -64V$$

Από $1s \le t \le 3s$

$$E = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \xrightarrow{(3)}$$

$$E = -10 \cdot \frac{d(-3{,}2t + 9{,}6)}{dt} \Leftrightarrow$$

$$E = +32V$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 3.

Παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 1s$, αλλάζει η πολικότητα της ΗΕΔ. Άρα είναι **εναλλασσόμενη**.

γ) Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος θα είναι

$$R_{o\lambda} = R_{\sigma\tau\varepsilon\varphi} + R = R^{*} \cdot N \cdot 2\pi r + R = \frac{0{,}5}{\sqrt{\pi}} \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} + 80 = 20 + 80 = 100\Omega$$

Από το νόμο του Ohm στο κλειστό κύκλωμα

Από $0s \le t \le 1s$

$$I = \frac{E}{R_{o\lambda}} \Leftrightarrow I = \frac{-64}{100} \Leftrightarrow I = -0{,}64\,A$$

Από $1s \le t \le 3s$

$$I = \frac{E}{R_{o\lambda}} \Leftrightarrow I = \frac{32}{100} \Leftrightarrow I = 0{,}32\,A$$

Υπολογίζουμε το ποσό της θερμικής ενέργειας που αναπτύσσεται στο λαμπτήρα από αυτό το ρεύμα.

$$Q = Q_{0\to1} + Q_{1\to3} = I^2{}_{0\to1} R\Delta t_1 + I^2{}_{1\to3} R\Delta t_2 = \left[(-0{,}64)^2 \cdot 1 + (0{,}32)^2 \cdot 2\right] R \Leftrightarrow$$

$Q = 0{,}6144R$ (5)

Αν $I_{\varepsilon\nu}$ η ενεργός ένταση, θα πρέπει

$$Q = I_{\varepsilon\nu}{}^2 R\Delta t \xrightarrow{(5)} 0{,}6144R = I_{\varepsilon\nu}{}^2 R \cdot 3 \Leftrightarrow I_{\varepsilon\nu} = \sqrt{0{,}2048} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\nu} = \sqrt{2 \cdot 0{,}1024} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{I_{\varepsilon\nu} = 0{,}32\sqrt{2}\,A}$$

δ) Από τη σχέση υπολογισμού της θερμικής ισχύος, που αποδίδει ο λαμπτήρας όταν λειτουργεί κανονικά, μπορούμε να βρούμε την ένταση του ρεύματος καλής λειτουργίας: $P_\kappa = I^2{}_\kappa \cdot R \Leftrightarrow I_\kappa = \sqrt{\frac{P_\kappa}{R}} \Leftrightarrow I_\kappa = \sqrt{\frac{51{,}2}{80}} \Leftrightarrow I_\kappa = \sqrt{0{,}64} \Leftrightarrow$

$$\boxed{I_\kappa = 0{,}8A}$$

Συγκρινόμενη με τις τιμές που βρήκαμε στο ερώτημα **(γ),** βλέπουμε ότι ο λαμπτήρας **υπολειτουργεί** σε κάθε φάση. Η φορά του ρεύματος προφανώς δεν επηρεάζει το θερμικό αποτέλεσμα.

ε) Υπολογίζουμε τις αλγεβρικές τιμές του ηλεκτρικού φορτίου:

$$\Delta q_{0\to 1} = I_{0\to 1}\Delta t_1 = -0{,}64\,C$$
$$\Delta q_{1\to 3} = I_{1\to 3}\Delta t_2 = 0{,}32\cdot 2 = 0{,}64\,C$$

Άρα το ηλεκτρικό φορτίο που πέρασε ή μετατοπίστηκε με βάση τη φορά του ρεύματος είναι

$$\Delta q_{ολ} = 0\,C$$

Υπολογίζουμε τις απόλυτες τιμές του ηλεκτρικού φορτίου:

$$|\Delta q_{0\to 1}| = |I_{0\to 1}|\Delta t_1 = 0{,}64\,C$$
$$|\Delta q_{1\to 3}| = |I_{1\to 3}|\Delta t_2 = 0{,}32\cdot 2 = 0{,}64\,C$$

Άρα το ηλεκτρικό φορτίο που διακινήθηκε ανεξάρτητα από τη φορά του ρεύματος είναι

$$|\Delta q_{ολ}| = 1{,}28\,C$$

Η μεταβολή της μαγνητικής ροής, σε όλο το χρονικό διάστημα, από μία σπείρα είναι

$$\Delta\Phi = \Phi(3) - \Phi(0) = -3{,}2\cdot 3 + 9{,}6 - 6{,}4\cdot 0 = 0\,Wb$$

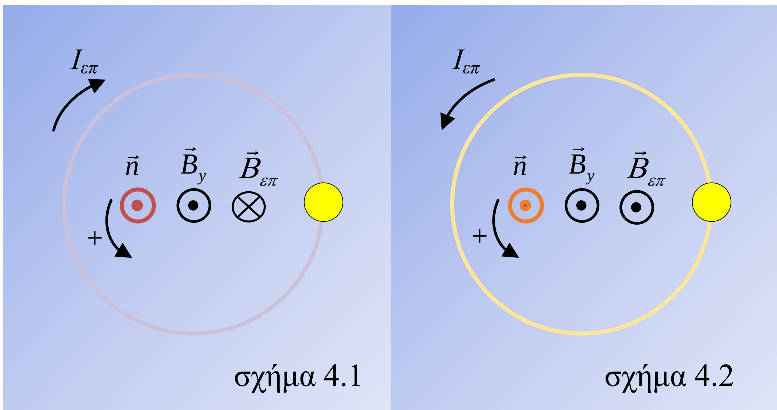
Ο νόμος Newman δίνει

$\Delta q = -N\cdot\dfrac{\Delta\Phi}{R_{ολ}} = 0\,C$ δηλαδή υπολογίζει το ηλεκτρικό φορτίο που πέρασε με βάση τη φορά του ρεύματος.

στ) Στο σχήμα 4, έχει σχεδιαστεί η κάθετη στην επιφάνεια συνιστώσα $\vec{B}_y$ της έντασης του μαγνητικού πεδίου, αφού αυτή δημιουργεί τη μαγνητική ροή μέσα από το στεφάνι.

Από $0s \le t < 1s$ η μαγνητική ροή αυξάνεται. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, η ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται στο στεφάνι, θα προκαλέσει επαγωγικό ρεύμα, του οποίου η φορά θα είναι τέτοια ώστε το μαγνητικό του πεδίο $\vec{B}_{επ}$, να εμποδίζει την αιτία που το δημιουργεί. Δηλαδή θα πρέπει να τείνει να εμποδίσει την αύξηση της μαγνητικής ροής. Άρα το επαγωγικό ρεύμα θα έχει φορά **ωρολογιακή** (σχήμα 4.1).

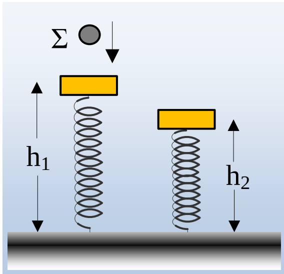
- Εναλλακτικά: Με βάση το εμβαδικό διάνυσμα και τον κανόνα του δεξιού χεριού, ο βρόγχος του κυκλώματος έχει θετική φορά διαγραφής την αντιωρολογιακή. Η αλγεβρική τιμή της έντασης του ρεύματος είναι αρνητική, άρα θα διαρρέει με **ωρολογιακή** φορά το βρόγχο.



Από $1s \le t \le 3s$ η μαγνητική ροή μειώνεται. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, η ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται στο στεφάνι, θα προκαλέσει επαγωγικό ρεύμα, του οποίου η φορά θα είναι τέτοια ώστε το μαγνητικό του πεδίο $\vec{B}_{επ}$, να εμποδίζει την αιτία που το δημιουργεί. Δηλαδή θα πρέπει να τείνει να εμποδίσει τη μείωση της μαγνητικής ροής. Άρα το επαγωγικό ρεύμα θα έχει φορά **αντιωρολογιακή** (σχήμα 4.2).

- Εναλλακτικά: Με βάση το εμβαδικό διάνυσμα και τον κανόνα του δεξιού χεριού, ο βρόγχος του κυκλώματος έχει θετική φορά διαγραφής την αντιωρολογιακή. Η αλγεβρική τιμή της έντασης του ρεύματος είναι θετική, άρα θα διαρρέει με **αντιωρολογιακή** φορά το βρόγχο.

7) Μια πλάκα μάζας M=2kg ηρεμεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος, σε ύψος h_1=0,4m. Σε μια στιγμή t=0, μια σφαίρα η οποία πέφτει κατακόρυφα συγκρούεται με την πλάκα, η οποία στη συνέχεια αρχίζει να εκτελεί μια κατακόρυφη ΑΑΤ, κατά την οποία το ελάχιστο ύψος από το έδαφος που φτάνει είναι h_2=0,3m, τη στιγμή t_1=(π/20)s=0,157s, για πρώτη φορά, ενώ η σφαίρα κινείται προς τα πάνω.



i) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στην πλάκα στη διάρκεια της κρούσης;

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση του ύψους της πλάκας από το έδαφος σε συνάρτηση με το χρόνο,

θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική.

iii) Σε μια στιγμή t_2 η πλάκα και η σφαίρα έχουν τις ίδιες ταχύτητες και τις ίδιες επιταχύνσεις. Αν οι τιμές αυτές για την πλάκα είναι η πρώτη φορά που επιτυγχάνονται:

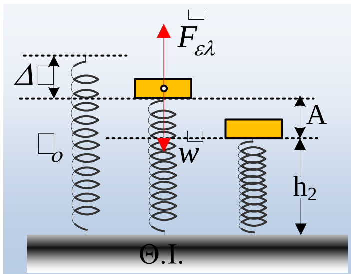
α) Να βρεθεί η στιγμή t_2.

β) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.

γ) Αν η σφαίρα έχει μάζα m=1/6 kg, να εξετάσετε αν η παραπάνω κρούση είναι ή όχι ελαστική.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση: **i)** Τη στιγμή t_1 που η πλάκα βρίσκεται στο ελάχιστο ύψος h_2, έχει μηδενική ταχύτητα και η θέση αυτή είναι θέση πλάτους, συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης είναι Α=h_1-h_2=0,4m-0,3m=0,1m, ενώ t_1= ¼ Τ, οπότε:



$$T = 4t_1 \to 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 4t_1 \to 4\pi^2\frac{M}{k} = 16t_1^2 \to$$

$$k = \frac{4\pi^2 M}{16\left(\frac{\pi}{20}\right)^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 2 \cdot 400}{16\pi^2}N/m = 200N/m$$

Οπότε η ενέργεια που μεταφέρθηκε στην πλάκα από τη σφαίρα, στη διάρκεια της κρούσης είναι:

$$E = E_\tau = \frac{1}{2}M\upsilon_{2,max}^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}1^2\,J = 1J$$

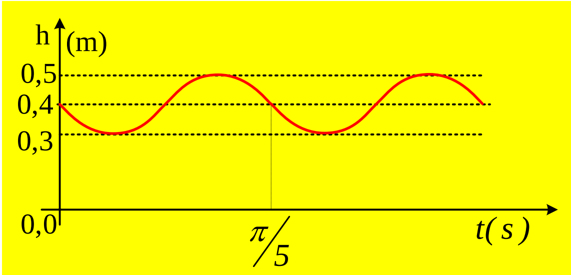
ii) Θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, η πλάκα ξεκινά την ταλάντωσή της από την θέση ισορροπίας, κινούμενη προς την αρνητική κατεύθυνση, με $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{200}{2}}rad/s = 10rad/s$, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής της από την θέση ισορροπίας της, έχει τη μορφή:

$$y = A\cdot\eta\mu(\omega t+\pi) = 0{,}1\cdot\eta\mu(10t+\pi) \quad \text{(S.I.)}$$

Αλλά τότε κάθε στιγμή, η πλάκα βρίσκεται σε ύψος:

$$h= h_1+y = 0,4+0,1\cdot\eta\mu(10t+\pi) = 0,4 -0,1\eta\mu(10t) \quad (\text{S.I.})$$

Με βάση αυτά, η ζητούμενη γραφική παράσταση παίρνει τη μορφή:



iii) Η σφαίρα κινείται με σταθερή επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Αντίθετα η πλάκα έχει μεταβαλλόμενη επιτάχυνση, αφού σε κάθε θέση, εκτός του βάρους δέχεται και την δύναμη του ελατηρίου. Αλλά τότε οι επιταχύνσεις θα γίνουν ίσες όταν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό μήκος του, οπότε στην πλάκα ασκείται μόνο το βάρος, έχοντας επιτάχυνση g!

α) Στην θέση ισορροπίας της πλάκας ισχύει:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=w \rightarrow k\cdot\Delta l = Mg \rightarrow \Delta l = \frac{Mg}{k} = \frac{2\cdot 10}{200} m = 0{,}1m$$

Βλέπουμε ότι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι και θέση πλάτους, στην οποία η πλάκα θα φτάσει για πρώτη φορά, τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = \frac{3}{4}T = \frac{3}{4}\frac{\pi}{5}s = 3\frac{\pi}{20}s = 3\cdot 0{,}157s = 0{,}47s$$

β) Τη στιγμή t_2 η πλάκα βρίσκεται σε ακραία θέση, έχοντας μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε και η σφαίρα θα έχει μηδενική ταχύτητα, ευρισκόμενη στο μέγιστο ύψος, της κατακόρυφης βολής που εκτελεί. Αν λοιπόν αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα με φορά προς τα πάνω, μέτρου υ_1, θα ισχύει για την κίνησή της:

$$\upsilon_\sigma = \upsilon_1 - gt \xrightarrow{\upsilon_\sigma=0} \upsilon_1 - gt_2 = 0 \rightarrow$$
$$\upsilon_1 = gt_2 = 10\cdot 0{,}47m/s = 4{,}7m/s$$

γ) Η πλάκα μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_{2,\mu\alpha x}=\omega A=10\cdot 0{,}1m/s=1m/s$$

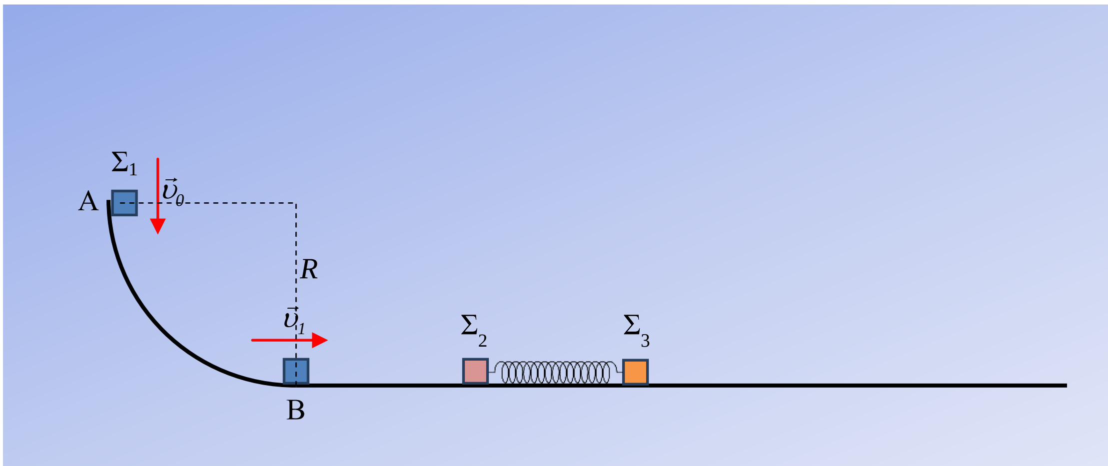
με φορά προς τα κάτω (έστω με αρνητική κατεύθυνση). Οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση, παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow m\upsilon_0 = m\upsilon_1 + M\upsilon_2 \rightarrow$$
$$\upsilon_0 = \frac{m\upsilon_1 + M\upsilon_2}{m} = \upsilon_1 + \frac{M\upsilon_2}{m} \rightarrow$$
$$\upsilon_0 = -4{,}7m/s + \frac{2\cdot 1}{1/6} m/s = 7{,}3m/s$$

Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων που συγκρούονται, ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση:

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{6}\cdot 7{,}3^2 J = 4{,}44J$$
$$K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{6}\cdot 4{,}7^2 J + \frac{1}{2}2\cdot 1^2 J = 2{,}84J$$

Βλέπουμε ότι εμφανίζεται απώλεια κινητικής ενέργειας, άρα η κρούση δεν είναι ελαστική.



8) Στο σχήμα φαίνεται τμήμα κατακόρυφης τομής κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας $R = 3{,}2m$, σχήματος τεταρτοκυκλίου. Από το ανώτερο σημείο Α, εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα κάτω μικρό σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 2kg$, με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 2m/s$, το οποίο ολισθαίνει συνεχώς στην κυλινδρική επιφάνεια, κατέρχεται, φτάνει στο κατώτερο σημείο Β του τεταρτοκυκλίου και εισέρχεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$. Πάνω σε αυτό το οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί το σύστημα των σωμάτων $Σ_2$ - $Σ_3$ με το οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 2000N/m$, που τα συνδέει, να βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Το $Σ_1$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σύστημα των σωμάτων $Σ_2 – Σ_3$. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα $Σ_2$ αποκτά αλγεβρική τιμή ταχύτητας $\upsilon_2' = (2/3)\upsilon_1$. Δίνεται $g = 10m/s^2$.

α) Αν η κάθετη αντίδραση που ασκείται στο σώμα $Σ_1$, όταν διέρχεται από το σημείο Β, έχει μέτρο $N = 42{,}5N$, ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$;
β) Δικαιολογείστε ενεργειακά γιατί το τεταρτοκύκλιο δεν είναι λείο και υπολογίστε το ποσοστό της αρχικής μηχανικής ενέργειας του $Σ_1$, που έγινε θερμική ενέργεια. Θεωρείστε επίπεδο αναφοράς βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο, που διέρχεται από το Β.
γ) Υπολογίστε τη μεταβολή της ορμής του σώματος $Σ_1$ κατά την κίνησή του στο τεταρτοκύκλιο.
δ) Ποια είναι η μάζα m_2 του σώματος $Σ_2$ και πόση είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του $Σ_1$ εξ αιτίας της κρούσης;
ε) Να μελετήσετε ποιοτικά το είδος της κίνησης που θα εκτελέσουν τα σώματα $Σ_2$ και $Σ_3$ μετά την κρούση.
στ) Αν $m_3 = 16kg$, βρείτε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου και τις ταχύτητες των σωμάτων $Σ_2$ και $Σ_3$ εκείνη τη στιγμή.
ζ) Υπολογίστε τους ρυθμούς μεταβολής ταχύτητας, ορμής και κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_2$, τη στιγμή που το ελατήριο έχει τη μέγιστη συμπίεση.
η) Ποιες είναι οι ταχύτητες $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ των σωμάτων $Σ_2$ και $Σ_3$ τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά για πρώτη φορά μετά την κρούση το φυσικό του μήκος;

Απάντηση

α). Στο σχήμα 1 έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στη θέση Β. Η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, αν υπάρχει, δεν επηρεάζει την απάντηση του ερωτήματος.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, κατά τη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, οφείλουν να δημιουργήσουν την απαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη

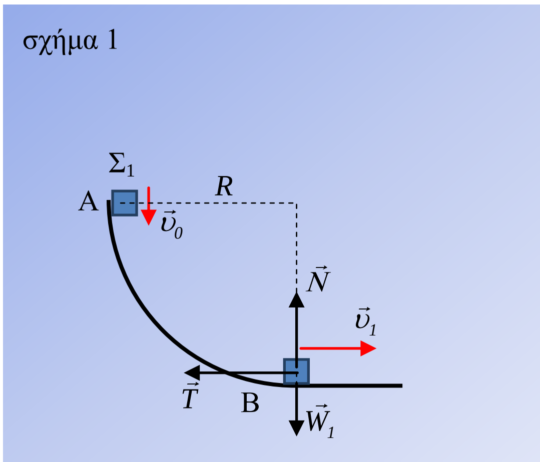
$$\Sigma \vec{F}_R = \vec{F}_K \Leftrightarrow N - W_1 = m_1 \frac{\upsilon_1^2}{R} \Leftrightarrow$$

$$m_1 \upsilon_1^2 = R(N - m_1 g) \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{R(N - m_1 g)}{m_1}} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{3{,}2 \cdot (42{,}5 - 20)}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_1 = 6m/s}$$



β) Στο σημείο Α η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = m_1 gR + \frac{1}{2} m_1 \upsilon_0^{\,2} = 20 \cdot 3{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 = 64 + 4 = 68J$$

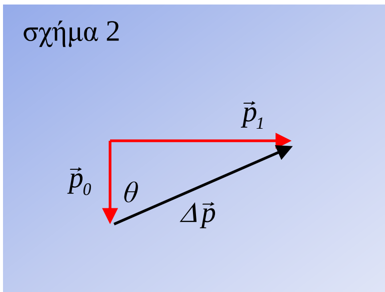
Στο κατώτερο σημείο Β του τεταρτοκυκλίου

$$E_{\mu\eta\chi(B)} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^{\,2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6^2 = 36J$$

Παρατηρούμε μείωση της μηχανικής ενέργειας κατά $\left|\Delta E_{\mu\eta\chi}\right| = 68 - 36 = 32J$, που προφανώς οφείλεται σε παραγωγή έργου από την τριβή ολίσθησης, Το ποσοστό της αρχικής μηχανικής ενέργειας, που έγινε θερμική είναι

$$\pi = \frac{\left|\Delta E_{\mu\eta\chi}\right|}{E_{\mu\eta\chi(A)}} \cdot 100 = \frac{32}{68} \cdot 100 \approx 47\%$$

γ) Στο σχήμα 2 φαίνονται τα διανύσματα



της αρχικής ορμής μέτρου $\left|p_0\right| = m_1 \cdot \upsilon_0 = 2 \cdot 2 = 4kgm/s$

της τελικής ορμής μέτρου $\left|p_1\right| = m_1 \cdot \upsilon_1 = 2 \cdot 6 = 12kgm/s$

και της μεταβολής της ορμής μέτρου

$$\left|\Delta p\right| = \sqrt{p_0^{\,2} + p_1^{\,2}} = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} \Leftrightarrow$$

$$\left|\Delta p\right| = 4\sqrt{10}\,kgm/s$$

με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία ϑ με τη διεύθυνση του $\vec{p}_0$, όπου

$$\varepsilon\varphi\theta = \left|\frac{p_1}{p_0}\right| = 3 \Leftrightarrow \theta \approx 72^0$$

δ) Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την ελαστική κρούση είναι

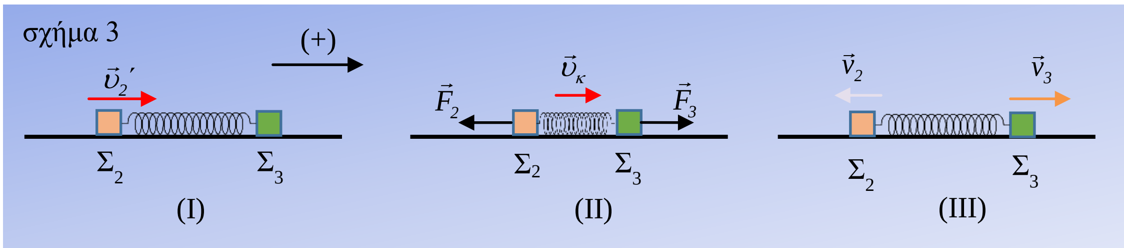
$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\upsilon_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \Leftrightarrow m_1 + m_2 = 3m_1 \Leftrightarrow m_2 = 2m_1 \Leftrightarrow m_2 = 4kg$$

Με θετική φορά προς τα δεξιά υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή $\upsilon_2' = \frac{2}{3}\upsilon_1 = 4m/s$.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος $\Sigma_1 - \Sigma_2$ αμέσως πριν και αμέσως μετά την ελαστική κρούση δεν αλλάζει, άρα η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του Σ_1 θα είναι αντίθετη από τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του Σ_2, δηλαδή

$$\Delta K_1 = -\Delta K_2 = -\frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^{\,2} = -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4^2 = -2 \cdot 16 = -32J$$

ε)



Το Σ_2 μετά την κρούση τείνει να κινηθεί προς τα δεξιά. Το ελατήριο αρχίζει να συμπιέζεται, άρα ασκεί δύο αντίθετες δυνάμεις $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ στα σώματα. Η δύναμη $\vec{F}_2$ επιβραδύνει το Σ_1, ενώ η δύναμη $\vec{F}_3$ επιταχύνει το Σ_3. Κάποια στιγμή οι ταχύτητες των δύο σωμάτων γίνονται ίσες με $\vec{\upsilon}_\kappa$ και τότε το ελατήριο έχει αποκτήσει τη μέγιστη συμπίεση (σχήμα 3ΙΙ). Το φαινόμενο είναι **ανάλογο με κεντρική ελαστική κρούση** ανάμεσα στα σώματα Σ_2 και Σ_3, αφού αυτά αλληλεπιδρούν με διατηρητικές δυνάμεις ελαστικής παραμόρφωσης, όπως ακριβώς σε μια ελαστική κρούση. Στη συνέχεια το ελατήριο αποσυμπιέζεται και όταν φτάσει πάλι στο φυσικό του μήκος οι ταχύτητες $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις της κεντρικής ελαστικής κρούσης.

στ) Με βάση και την ανάλυση του ερωτήματος (δ):

Το σύστημα των Σ_2 και Σ_3 είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται:

ΑΔΟ I → II, με θετική φορά προς τα δεξιά (σχήμα 3):

$$\vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma\tau(I)} = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma\tau(II)} \Leftrightarrow m_2\upsilon_2' + 0 = (m_2 + m_3)\upsilon_\kappa \Leftrightarrow 4 \cdot 4 = 20 \cdot \upsilon_\kappa \Leftrightarrow \upsilon_\kappa = 0{,}8m/s$$

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται:
ΑΔΜΕ Ι → ΙΙ:

$$E_{\mu\eta\chi(I)} = E_{\mu\eta\chi(II)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 \Leftrightarrow 4 \cdot 16 = 20 \cdot 0,64 + 2000 \cdot \Delta l^2 \Leftrightarrow$$

$$64 = 12,8 + 2000 \cdot \Delta l^2 \Leftrightarrow 51,2 = 2000 \cdot \Delta l^2 \Leftrightarrow \Delta l^2 = 0,0256 \Leftrightarrow \Delta l = 0,16m$$

ζ) Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας:

$$\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m_2} \Rightarrow \frac{d\upsilon_2}{dt} = \frac{-k \cdot \Delta l}{m_2} = \frac{-2000 \cdot 0,16}{4} = -80m/s^2$$

Ρυθμός μεταβολής ορμής:

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 \Rightarrow \frac{dp_2}{dt} = -k \cdot \Delta l = -2000 \cdot 0,16 = -320kgm/s^2$$

Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας:

$$\frac{dK_2}{dt} = F_2 \cdot \upsilon_\kappa = -k \cdot \Delta l \cdot \upsilon_\kappa = -320 \cdot 0,8 = -256\,J/s$$

Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας:
Η δυναμική ενέργεια, τη στιγμή αυτή έχει πάρει τη μέγιστη τιμή της, που σημαίνει ότι αν κάναμε τη γραφική παράσταση $U_{\varepsilon\lambda} = f(t)$ η κλίση της θα ήταν μηδενική, άρα

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 0\,J/s$$

Εναλλακτικά αν παρατηρήσουμε ότι για το Σ_3

$$\frac{dK_3}{dt} = F_3 \cdot \upsilon_\kappa = +k \cdot \Delta l \cdot \upsilon_\kappa = +320 \cdot 0,8 = +256\,J/s$$

και σκεφτούμε ότι η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας επιβάλλει

$$\frac{dE_{\mu\eta\chi(\sigma\upsilon\sigma\tau)}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dK_2}{dt} + \frac{dK_3}{dt} + \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 0 \Leftrightarrow -256 + 256 + \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = 0\,J/s$$

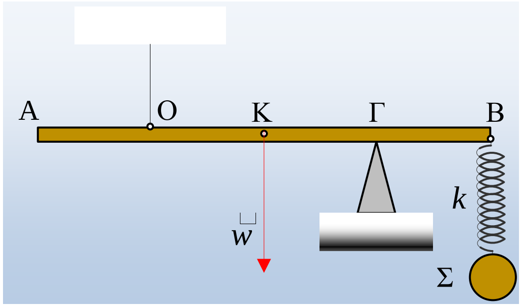
ζ) Σύμφωνα με την ανάλυση του ερωτήματος (δ), παίρνουμε «έτοιμους» τους τύπους της κεντρικής ελαστικής κρούσης:

$$v_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} \cdot \upsilon_2' = \frac{4 - 16}{4 + 16} \cdot 4 = -0,6 \cdot 4 = -2,4m/s$$

$$v_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} \cdot \upsilon_2' = \frac{2 \cdot 4}{4 + 16} \cdot 4 = 0,4 \cdot 4 = 1,6m/s$$

δηλαδή η $\vec{v}_2$ έχει φορά προς τα αριστερά και η $\vec{v}_3$ προς τα δεξιά (σχήμα 3ΙΙΙ).

9) Μια ομογενής ράβδος ΑΒ βάρους w=200N, ηρεμεί σε οριζόντια θέση, στηριζόμενη σε τρίποδο στο σημείο Γ, ενώ δένεται στο άκρο κατακόρυφου νήματος στο σημείο Ο. Στο άκρο Β έχει προσδεθεί ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k=200N/m, στο κάτω άκρο του οποίου, ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας m=5kg, όπως στο σχήμα.



i) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος.

ii) Εκτρέπουμε το σώμα Σ κατακόρυφα προς τα κάτω κατά y_1=0,2m και τη στιγμή t=0, το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει αατ. Θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, να βρεθούν οι εξισώσεις και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις:

α) Της δύναμης του ελατηρίου η οποία ασκείται στο σώμα Σ.

β) Της τάσης του νήματος, η οποία ασκείται στη ράβδο.

iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα εκτρέπουμε το σώμα Σ προς τα κάτω κατά y_2=0,5m και το αφήνουμε να ταλαντωθεί.

α) Να αποδείξετε ότι θα σπάσει το νήμα και θα καταστραφεί η ισορροπία, πριν το σώμα φτάσει στην άνω ακραία θέση της ταλάντωσής του.

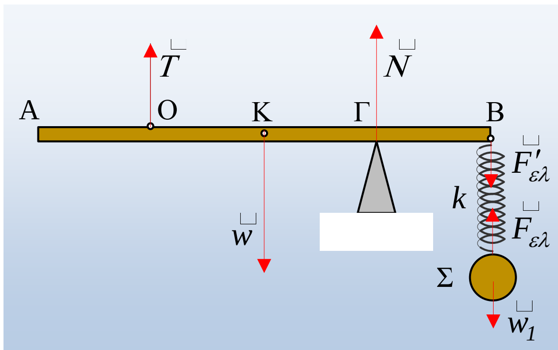
β) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του σώματος Σ, τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

Δίνεται το όριο θραύσεως του νήματος $T_θ$=120N, g=10m/s^2, $π^2$≈10, ενώ για τις αποστάσεις που βλέπετε στο σχήμα (ΑΟ)=(ΟΚ)=(ΚΓ)=ΓΒ)=1m.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σώμα Σ και στην ράβδο. Από την ισορροπίας του σώματος Σ, παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_1 = mg = 50N$$



Οπότε το ελατήριο ασκεί στη ράβδο κατακόρυφη δύναμη, με κατεύθυνση προς τα κάτω, μέτρου $F_{ελ}'$=50N.

Από την συνθήκη ισορροπίας της ράβδου, με θετικές ροπές τις αριστερόστροφες παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_\Gamma=0 \rightarrow -T\cdot(O\Gamma)+w\cdot(K\Gamma)+N\cdot 0-F_{\varepsilon\lambda}'\cdot \Gamma B) =0 \quad \rightarrow \text{με αντικατάσταση:}$$

$$-T\cdot 2+200\cdot 1-50\cdot 1 \rightarrow T=75N$$

ii) Το σώμα Σ. τη στιγμή t=0 ξεκινά να ταλαντώνεται, με μηδενική αρχική ταχύτητα και με αρχική απομάκρυνση y=-0,2m, αφού έχουμε την προς τα πάνω κατεύθυνση. Αλλά τότε το πλάτος θα είναι ίσο με A_1=0,2m και ξεκινώντας το σώμα από την ακραία αρνητική απομάκρυνσή του θα έχει αρχική φάση απομάκρυνσης $φ_ο$=3π/2, ενώ:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{5}} rad/s = \sqrt{40} rad/s = 2\pi \ \ rad/s$$

Με βάση αυτά η εξίσωση της απομάκρυνσής του παίρνει τη μορφή:

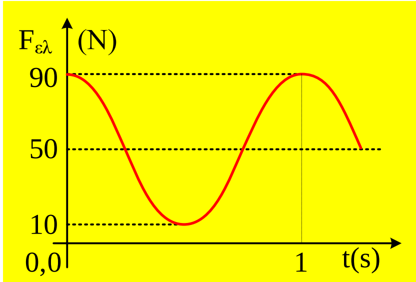
$$y = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

α) Από το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Σ παίρνουμε:

$$\Sigma F = -Dy \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - mg = -ky \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = 5 \cdot 10N - 200 \cdot 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)N \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = 50 - 40 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$



Με γραφική παράσταση αυτή του διπλανού σχήματος, λαμβάνοντας υπόψη ότι η περίοδος είναι T=1s.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η δύναμη από το ελατήριο στο σώμα Σ έχει φορά πάντα προς τα πάνω ή ισοδύναμα το ελατήριο ασκεί δύναμη στην ράβδο διαρκώς προς τα κάτω.

β) Παίρνουμε ξανά τις ροπές στην ράβδο ως προς το σημείο Γ και έχουμε:

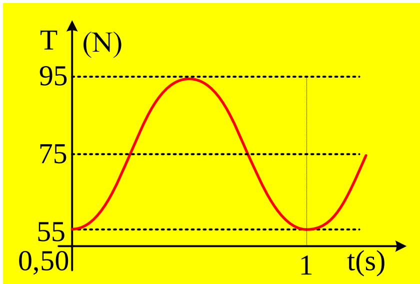
$$\Sigma\tau_{\Gamma}=0 \rightarrow -T\cdot(O\Gamma)+w\cdot(K\Gamma)+N\cdot 0- F_{\varepsilon\lambda}'\cdot\Gamma B) =0$$

με αντικατάσταση, όπου δουλεύουμε με μέτρα δυνάμεων, οπότε:

$$|F'_{\varepsilon\lambda}| = 50 - 40 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

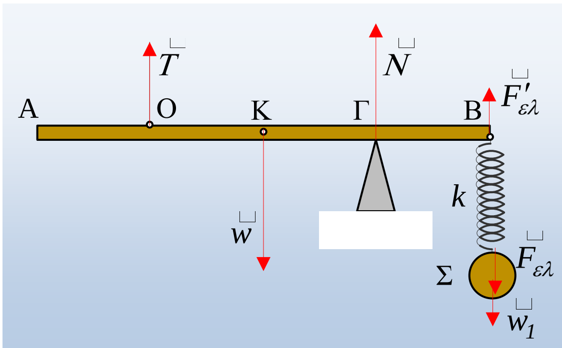
$$-T \cdot 2 + 200 \cdot 1 + N \cdot 0 - 50 \cdot 1 + 40 \cdot 1 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$T=75+20 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$



Οπότε η ζητούμενη γραφική παράσταση έχει την μορφή του παραπάνω σχήματος.

iii) Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της τάσης του νήματος, όταν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό μήκος του, για να προσδιορίσουμε αν θα σπάσει πριν η μετά την θέση αυτή, οπότε να σχεδιάσουμε σωστά την δύναμη του ελατηρίου στην ράβδο. Από την συνθήκη ισορροπίας για την περίπτωση αυτή, παίρνουμε:



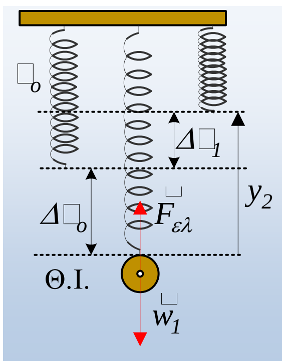
$$\Sigma\tau_{\Gamma}=0 \rightarrow$$

$$-T_o \cdot(O\Gamma)+w\cdot(K\Gamma)+N\cdot 0- F_{\varepsilon\lambda}'\cdot\Gamma B) =0 \rightarrow$$

$$-T_o \cdot 2 +200\cdot 1 =0 \rightarrow T_o=100N$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το νήμα … αντέχει. Αλλά τότε, αν σπάσει, αυτό θα συμβεί με το ελατήριο συμπιεσμένο, οπότε η ράβδος δέχεται δύναμη προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.

α) Έστω μια στιγμή t΄ όπου η τάση του νήματος παίρνει την τιμή T_θ=120N (οριακά πριν σπάσει…). Από την συνθήκη ισορροπίας για την ράβδο, παίρνουμε:



$$\Sigma\tau_{\Gamma}=0 \rightarrow -T_\vartheta \cdot(O\Gamma)+w\cdot(K\Gamma)+N\cdot 0+ F_{\varepsilon\lambda}'\cdot\Gamma B) =0 \rightarrow$$

$$-120 \cdot 2 +200\cdot 1+F_{\varepsilon\lambda}'\cdot 1=0 \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda}'=40N$$

Αυτό σημαίνει ότι το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά:

$$\Delta l_1 = \frac{F'_{\varepsilon\lambda}}{k} = \frac{40}{200} m = 0,2m,$$

οπότε με βάση το διπλανό σχήμα, όπου:

$$\Delta l_o = \frac{F_{\varepsilon\lambda.o}}{k} = \frac{mg}{k} = \frac{5 \cdot 10}{200} m = 0,25m$$

το σώμα Σ έχει απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του:

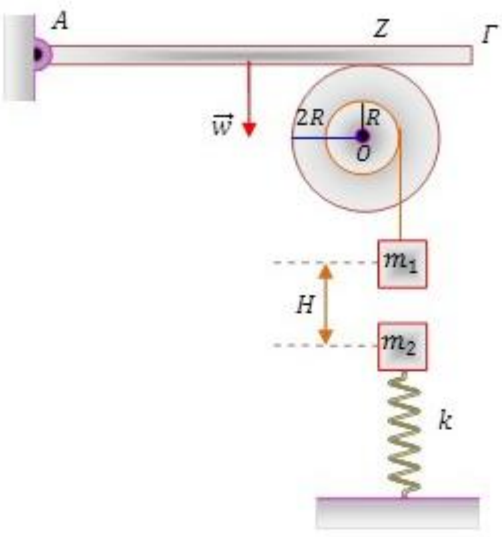
$$y_2 = \Delta l_o + \Delta l_1 = 0,25m + 0,2m = 0,45m$$

Όταν δηλαδή το σώμα βρεθεί πάνω από την θέση ισορροπίας σε απομάκρυνση y_2=0,45m, η τάση του νήματος θα γίνει ίση με το όριο θραύσεως του νήματος ($T_{\theta\rho}$=120N) και το νήμα θα κοπεί. Αλλά τότε θα καταστραφεί και η ισορροπία της ράβδου και η ταλάντωση του σώματος Σ.

β) Η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ, παραμένει σταθερή, οπότε για την κινητική ενέργεια του σώματος, τη στιγμή που σπάει το νήμα, θα έχουμε:

$$K + U = E_\tau \rightarrow K + \frac{1}{2}Dy_2^2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \rightarrow$$
$$K = \frac{1}{2}kA_2^2 - \frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}k\left(A_2^2 - y_2^2\right) \rightarrow$$
$$K = \frac{1}{2}200\left(0,5^2 - 0,45^2\right)J = 4,75J$$

10)



Η τροχαλία του σχήματος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο και ακλόνητο άξονα Ο που περνά από το κέντρο της. Μέσω αβαρούς νήματος στον εσωτερικό δίσκο της τροχαλίας ακτίνας (R) έχει δεθεί σώμα Σ1 μάζας $m_1 = 1kg$. Η ομογενής ράβδος $(A\Gamma) = l$ έχει βάρος $w = 15N$ είναι αρθρωμένη στο άκρο Α και βρίσκεται σε επαφή με την τροχαλία στο σημείο Ζ με $\Gamma Z = l/4$. Το σύστημα ράβδος-τροχαλία-μάζα m_1 ηρεμεί. Στην ίδια κατακόρυφη με το σώμα μάζας m_1 υπάρχει σώμα Σ2 μάζας m_2 το οποίο ηρεμεί στερεωμένο πάνω σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k. Βρείτε:

Α. Τις δυνάμεις που δέχεται η ράβδος από την τροχαλία και από την άρθρωση

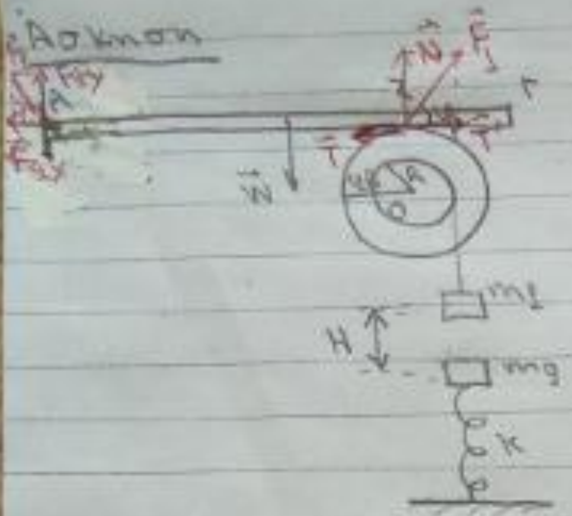
Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και τη στιγμή $t_o = 0$ τα σώματα με μάζες m_1 και m_2 συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ2 αποκτά ταχύτητα μέτρου $2\pi m/s$ και τη στιγμή $t_1 = 0,1\pi$ η ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 μηδενίζεται για πρώτη φορά, ενώ τη στιγμή $t_2 = 2t_1$ τα σώματα συγκρούονται για δεύτερη φορά.

Β. Βρείτε την μάζα m_2 και την σταθερά του ελατηρίου

Γ Τους ρυθμούς μεταβολής της κινητικής ενέργειας των σωμάτων Σ1 και Σ2 τη χρονική στιγμή $t = t_1/2$. Δίδεται $g = 10m/s^2$, $m_2 > m_1$ και αντιστάσεις αέρα αμελητέες.

Απάντηση:

Άσκηση



$m_1 = 1\,kg$ | Ράβδος: $A\Gamma = \ell$, $w = 15\,N$, $\Gamma Z = \frac{\ell}{4}$

Σύστημα Ισορ. . m_2 Ισορ. $m_2 > m_1$

A. Δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2 = ;$

Απ

Τροχ. Ισορ: $T \cdot 2R = m_1 g R \Rightarrow T = 5\,N$

$T = T' = 5\,N$

Ράβδος: $\Sigma\tau^A = 0 \Rightarrow N \cdot AZ - w \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow N \cdot \frac{3\ell}{4} = w \cdot \frac{\ell}{2} \Rightarrow N = \frac{15 \cdot 2}{3} = 10\,N$

$F_1 = \sqrt{N^2 + T'^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 25} = 5\sqrt{5}\,N$

$\varepsilon\varphi = \frac{N}{T'} = 2$

Ράβδος

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{2x} = T' \Rightarrow F_{2x} = 5\,N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{2y} + N = w \Rightarrow F_{2y} = 5\,N$

$\Rightarrow F_2 = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}\,N$, $\varepsilon\varphi\theta = 1$

B. Κόβω νήμα $\rightarrow m_1 - m_2$ Ελαστική κρούση.

Μετά κρούση $m_1 \rightarrow v_1' = 2\pi\,m/s$

και $t_1 = 0{,}1\pi$ $m_2 \rightarrow v = 0$ για 1η φορά.

$t_2 = 2t_1$ συγκρούονται για δεύτερη φορά

$m_2 = ;$, $k = ;$

Απ.

Ελαστ. κρούση $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ (1)

$t_1 = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4t_1 = 0{,}4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}4\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{0{,}4} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \frac{1}{0{,}2} \Rightarrow \frac{k}{m_2} = \frac{1}{0{,}04}$

$\frac{k}{m_2} = \frac{100}{4} \Rightarrow \frac{k}{m_2} = 25$ (2)

$t_2 = 2t_1 \rightarrow t_2 = \frac{T}{2} \rightarrow m_2$ Αρχ. θέση. άρα m_1 επιστρέφει μετά

από κατακόρυφη βολή προς τα πάνω στην ίδια θέση.

$-v_1' = v_1' - g\,t_{o\lambda} \Rightarrow 2v_1' = g \cdot 2t_1 \Rightarrow v_1' = \pi\,m/s$ προς τα πάνω

$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ (3) $\frac{(1)}{(3)}: \frac{2\pi}{-\pi} = \frac{2m_1}{m_1 - m_2} \Rightarrow m_1 - m_2 = -m_1 \Rightarrow m_2 = 2m_1 = 2\,kg$

(2) $\rightarrow k = 25 \cdot 2 = 50\,N/m$

19

Γ. $\frac{dK}{dt} = ;$ των m_1 και m_2 για $t = \frac{t_1}{2} = 0,05\pi$ s

Απ

m_2: $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -Dx \cdot v$ (3)

m_1: $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -m_1 \cdot g \cdot v = -m_1 \cdot g \cdot \left(v_1' - g\frac{t_1}{2}\right) = -10\left(\pi - 10 \cdot \frac{0,1\pi}{2}\right) = 0$

$\frac{t_1}{2}$ → ανεβαίνει

$t=0 \begin{cases} x=0 \\ v>0 \end{cases} \varphi_0=0$ ⇒ $\frac{dK}{dt} = -5\pi$ J/s

$x = A\,\eta\mu(\omega t) \Rightarrow x = 0,4\pi \cdot \eta\mu 5t$

$v = \omega A\,\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow x = 2\pi\,\sigma\upsilon\nu 5t$

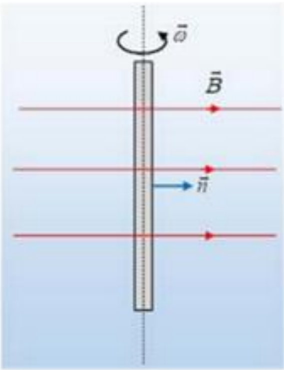
$A = \frac{v_1'}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T}} = T = 0,4\pi$

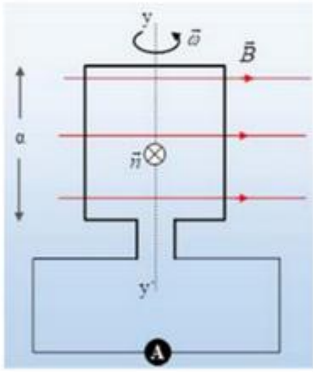
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4\pi} = \frac{10}{2}$ rad/s $= 5$ rad/s

(3) → $\frac{dK}{dt} = -k \cdot 0,4\pi \cdot \eta\mu(5 \cdot 0,05\pi) \cdot 2\pi\,\sigma\upsilon\nu(5 \cdot 0,05\pi) = -200$ J/s

11)

Ένα τετράγωνο μεταλλικό πλαίσιο πλευράς α=0,4m, στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=10π rad/s, γύρω από άξονα yy΄, ο οποίος είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B=0,5T και βρίσκεται στο επίπεδο του πλαισίου. Τη χρονική στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου, t=0, το επίπεδο του πλαισίου είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Στ' άκρα του πλαισίου είναι συνδεδεμένο ιδανικό αμπερόμετρο. Το πλαίσιο εμφανίζει αντίσταση R=8Ω. Κάποια στιγμή το πλαίσιο βρίσκεται με το επίπεδό του παράλληλο στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου.





Τη στιγμή αυτή:

B₁. Ποια η ένδειξη του αμπερομέτρου;

B₂. Ποια η στιγμιαία ισχύς στο κύκλωμα ; $(\pi^2=10)$

B₃. Ποιο το μέτρο των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο πλαίσιο από το μαγνητικό πεδίο, ως προς τον άξονα yy΄;

Απάντηση:

Καθώς το πλαίσιο στρέφεται μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο, μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνειά του και αναπτύσσεται αρμονικά εναλλασσόμενη τάση, οπότε διαρρέεται από αρμονικά εναλλασσόμενο ρεύμα.

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του πλαισίου είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου:

$$\Phi = BA\sigma\upsilon\nu\omega t = Ba^2\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \Phi = 8\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu 10\pi t (SI) \qquad (1)$$

Η αρμονικά εναλλασσόμενη τάση που αναπτύσσεται δίνεται από τη σχέση:

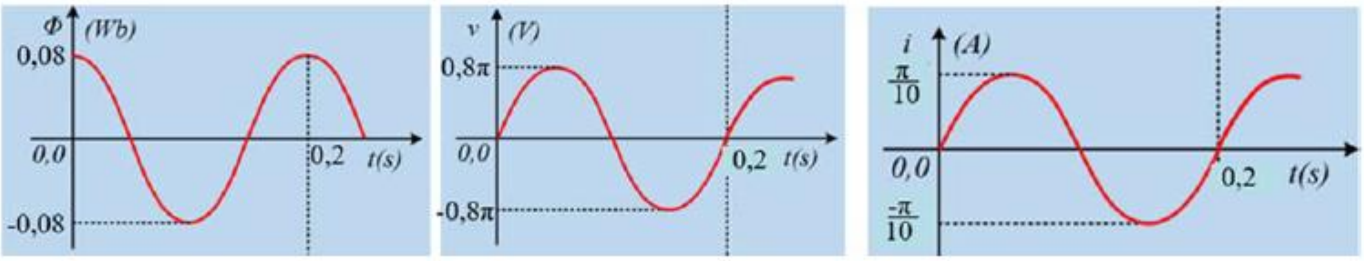
$$\upsilon = Ba^2\omega\eta\mu\omega t \Rightarrow \upsilon = 0{,}8\pi\eta\mu 10\pi t (SI) \qquad (2)$$

Το αρμονικά εναλλασσόμενο ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$i = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow i = \frac{\pi}{10}\eta\mu 10\pi t (SI) \qquad (3)$$

B₁. Το αμπερόμετρο στο κύκλωμα, μετρά την ενεργό ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα. Άρα κάθε στιγμή, η ένδειξη του αμπερόμετρου είναι: $I_A = I_{\varepsilon\nu} = \frac{\pi}{10\sqrt{2}}A \Rightarrow I_A = \frac{\pi\sqrt{2}}{20}A$

B₂. Τη στιγμή που το πλαίσιο βρίσκεται με το επίπεδό του παράλληλο στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, μηδενίζεται η ροή που διέρχεται από αυτό. Από τις γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (1), (2), (3) βλέπουμε πως όταν μηδενίζεται η μαγνητική ροή, η τάση και το ρεύμα μεγιστοποιούνται σε φάση κατά απόλυτη τιμή:

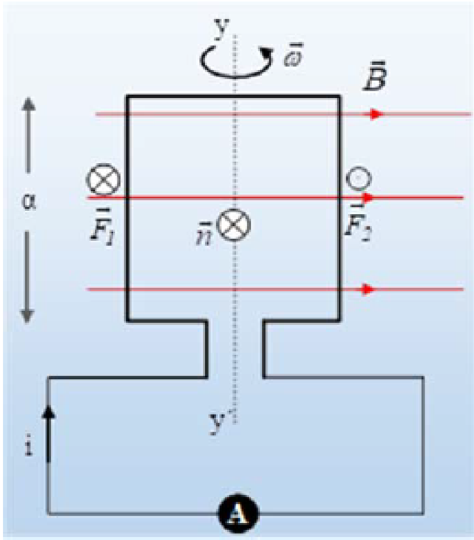


Οπότε η στιγμιαία ισχύς στο κύκλωμα είναι:

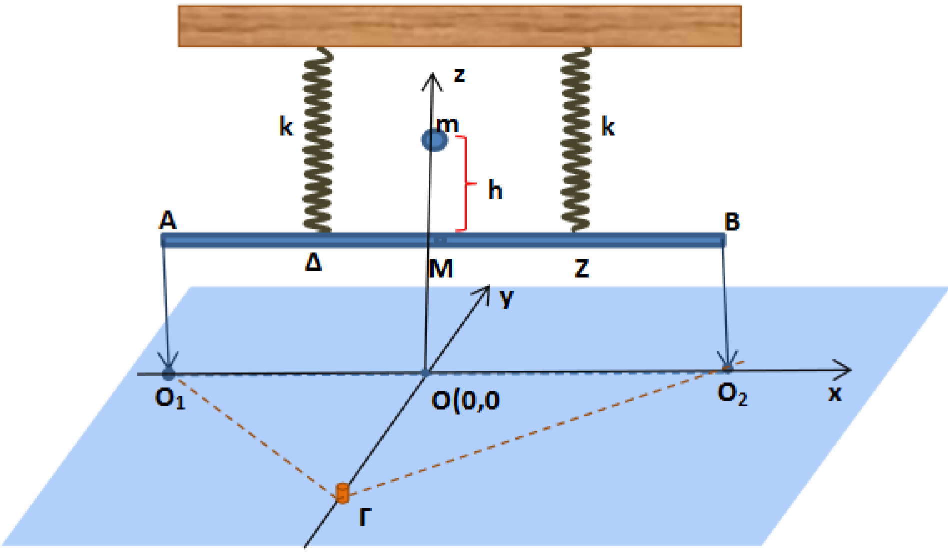
$$p=(\pm V)\cdot(\pm I)\Rightarrow p=V\cdot I\Rightarrow p=0,8\pi\cdot\frac{\pi}{10}W\Rightarrow p=0,8W$$

B₃. Οι πλευρές του πλαισίου οι παράλληλες στις δυναμικές γραμμές δεν δέχονται δυνάμεις Laplace. Οι πλευρές του πλαισίου οι κάθετες στις δυναμικές γραμμές δέχονται δυνάμεις Laplace οι οποίες αποτελούν ζεύγος. Έτσι το μέτρο των ροπών των δυνάμεων, είναι η ροπή του ζεύγους:

$$\Sigma\tau=F_L\cdot a\Rightarrow\Sigma\tau=BIa\cdot a=BIa^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\Sigma\tau=0,008\pi N\cdot m=8\pi\times10^{-3}N\cdot m$$



12.



Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται μια διάταξη που περιλαμβάνει: Ράβδο ΑΒ μήκους L και μάζας Μ που ισορροπεί εξαρτώμενη από δύο όμοια ιδανικά ελατήρια σταθεράς k. Στα άκρα της Α και Β είναι δύο λεπτά ελάσματα (ακίδες), που μόλις εφάπτονται της ελεύθερης επιφάνειας νερού στα σημεία O_1 και O_2. Σώμα μάζας m βρίσκεται σε κατακόρυφο ύψος h από το μέσο Μ της ράβδου. Αφήνουμε ελεύθερη τη μάζα m η οποία συγκρούεται πλαστικά με τη ράβδο στο μέσο της Μ. Το σύστημα ξεκινά να κάνει ταλάντωση με αποτέλεσμα οι ακίδες να βυθίζονται στο νερό κι έτσι να δημιουργούνται στην επιφάνεια του νερού αρμονικά κυκλικά κύματα με σταθερό πλάτος A_o, και συχνότητας ίσης με τη συχνότητα ταλάντωσης της ράβδου.

Σε σημείο Γ της επιφάνειας του νερού ισορροπεί μικρό κυλινδρικό σώμα μάζας m_1 σε απόσταση d από το μέσο O της O_1O_2. Τα κύματα αρχίζουν να δημιουργούνται τη χρονική στιγμή **t_o=0** από τις πηγές O_1 και O_2 ,ταυτόχρονα με την ταλάντωση της ράβδου , ενώ το σώμα m_1 ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή **t_1=2,5s**.

Δίνονται : **k=12,5N/m, m=1kg, M=3kg, L=0,8m, d=0,3m , h=0.2m , m_1=0,04kg , ΑΔ=ΒΖ=0,2m, A_o =1cm, g=10m/s^2**. Υπολογίστε

1. Την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του νερού και το μήκος κύματος λ.
2. Να γράψετε την χρονική εξίσωση α) της απομάκρυνσης του κυλίνδρου καθώς και β) της δύναμης που δέχεται από το νερό αυτός.
3. τον αριθμό των σημείων της O_1O_2 που βρίσκονται α) σε αντίθεση φάσης (ακίνητα σημεία μετά τη συμβολή), β) σε συμφωνία φάσης (μέγιστο πλάτος). Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης για τα σημεία αυτά που βρίσκονται πιο κοντά στο Ο.
4. το πλάτος ταλάντωσης Α του συστήματος της ράβδου και της μάζας ,*αν θεωρήσουμε ότι αυτό παραμένει σταθερό στο μικρό χρονικό διάστημα που διεξάγεται το πείραμα.*

Απαντήσεις

1. $O_1\Gamma = \sqrt{(OO_1)^2 + (O\Gamma)^2} = \sqrt{0{,}16 + 0{,}09}\text{m} = 0.5\text{m}$

   Η ταχύτητα των κυμάτων είναι $\upsilon = \frac{O_1\Gamma}{t_1} = \frac{0.5m}{2.5s} = 0.2m/s$

   Η συχνότητα f των κυμάτων είναι ίση με τη συχνότητα ταλάντωσης ράβδου και σώματος m. Θα δείξουμε ότι το κέντρο μάζας του συστήματος M+m κάνει αρμονική ταλάντωση

   Θ.Ι. ράβδου:$\Sigma F = 0 \Longrightarrow 2k\Delta l_o = Mg \Longrightarrow \Delta l_o = \frac{Mg}{2k} = \frac{30}{25}m = 1.2m$

   Θ.Ι. ράβδου+m: $\Sigma F = 0 \Longrightarrow 2k\Delta l_1 = (M+m)g \Longrightarrow \Delta l_1 = \frac{(M+m)g}{2k} = \frac{40}{25}m = 1.6m$

   Τυχαία θέση απομάκρυνσης z από τη Θ.Ι. του κ.μ. (ράβδου+m) :

   $$\Sigma F = 2k\Delta l - (M+m)g = 2k(\Delta l_1 - z) - (M+m)g = -2kz = -Dz$$

   Άρα έχουμε αρμονική ταλάντωση του κέντρου μάζας του συστήματος M+m

   με D=2k=25N/m όμως $D = (M+m)\omega^2 \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{25}{4}} = 2.5rad/s$

   $$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.5}{2\pi}Hz$$

   $$\upsilon = \lambda f \Longrightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{0{,}2 \cdot 2\pi}{2{,}5} = \mathbf{0{,}16\pi}\ m \cong 0.5m$$

   Το σύστημα M+m αμέσως μετά την πλαστική κρούση, κάνει μόνο μεταφορική κίνηση, γιατί η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν ως προς το κέντρο μάζας Μ του συστήματος, αφού οι ροπές των δυνάμεων των ελατηρίων είναι μηδέν $\Sigma\tau_{(M)} = (M+m)g \cdot 0 + F_{\varepsilon\lambda.} \cdot ZM - F_{\varepsilon\lambda.} \cdot M\Delta = 0$

2. α) Η εξίσωση ταλάντωσης του κυλίνδρου είναι

   $$\begin{cases} 0 \le t < 2.5s : z = 0 \\ 2.5s \le t \ \ : z = 2A_o\eta\mu\omega(t-2.5) = 0.02 \cdot \eta\mu 2{,}5(t-2.5)\ \ s.i. \end{cases}$$

   β) οι δυνάμεις που δέχεται ο κύλινδρος είναι το βάρος του και η δύναμη από το νερό, άρα

   $\Sigma F = m_1 a_1 = -m_1\omega^2 z = -0.04 \cdot 6.25 \cdot z = -0.25z \Longrightarrow$

   $\Sigma F = -5 \cdot 10^{-3} \cdot \eta\mu 2{,}5(t-2.5)\ \ s.i$ όμως $\Sigma F = F_{\nu\varepsilon\rho.} - m_1 g \Longrightarrow$

   $$F_{\nu\varepsilon\rho.} = m_1 g + \Sigma F = 0.4 - 5 \cdot 10^{-3} \cdot \eta\mu 2{,}5(t-2.5)\ \ s.i.$$

3. *α)* Τα σημεία της O_1O_2 που βρίσκονται σε αντίθεση φάσης (μηδενικό πλάτος), ικανοποιούν τη σχέση $x_1 - x_2 = (2N+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \xRightarrow{x_2=L-x_1} 2x_1 - L = (2N+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$\boldsymbol{x_1} = \frac{L}{2} + (2N+1)\cdot\frac{\lambda}{4} = 0.4 + (2N+1)0.125 = \mathbf{0.525 + 0.25N}$, N=ακέραιος

$$0 < x_1 < L \Rightarrow 0 < 0.525 + 0.25N < 0{,}8 \Rightarrow -2.1 < N < 1.1 \Rightarrow N = \{-2,-1,0,1\}$$

Άρα 4 σημεία στις θέσεις $x_1 = \{0.025m\ , 0.275m\ , 0.525m\ , 0.775m\}$ από το O_1, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το O(0,0).

Η ακυρωτική συμβολή για τα πιο κοντινά στο O(0,0) σημεία αυτά $x_1 = \{0.275m\ ,\ 0.525m\}$ γίνεται τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{L-x_1}{\upsilon} = \frac{0{,}8-0{,}275}{0{,}2} = 2{,}625s$$

Τα σημεία αυτά αρχίζουν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή $t_{o1} = \frac{x_1}{\upsilon} = \frac{0{,}275}{0{,}2} = 1{,}375s$ και σταματούν την ταλάντωσή τους τη χρονική στιγμή 2,625s.

Η εξίσωση ταλάντωσης τους είναι

$$\begin{cases} 0 \le t < 1{,}375s \ \ \kappa\alpha\iota\ \ \gamma\iota\alpha\ t > 2.625s \ \ : z = 0 \\ 1{,}375\ s \le t \ \le 2{,}625s \ : z = A_o \eta\mu\omega(t-1.375) = 0.01\cdot\eta\mu 2{,}5(t-1{,}375)\ \ s.i. \end{cases}$$

*β)*Τα σημεία της O_1O_2 που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης (μέγιστο πλάτος), ικανοποιούν τη σχέση $x_3 - x_4 = N\lambda \ \xRightarrow{x_4=L-x_3} 2x_3 - L = N\lambda \Rightarrow \boldsymbol{x_3} = \frac{L}{2} + N\frac{\lambda}{2} = \mathbf{0.4 + 0.25N}$, N=ακέραιος

$$0 < x_3 < L \Rightarrow 0 < 0.4 + 0.25N < 0{,}8 \Rightarrow -1{,}6 < N < 1{,}6 \Rightarrow N = \{-1{,}0{,}1\}$$

Άρα 3 σημεία στις θέσεις $x_3 = 0{,}15m\ , x'_3 = 0{,}4m\ \kappa\alpha\iota\ x''_3 = 0{,}65m$ από το O_1.

Η ενισχυτική συμβολή για τα σημεία αυτά γίνεται τη χρονική στιγμή

$t_3 = \frac{L/2}{\upsilon} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2s$ για το σημείο O(0,0) και ($t'_3 = \frac{L-x'_3}{\upsilon} = \frac{0.8-0.15}{0{,}2} = 3{,}25s$) για τα $x_3 = 0{,}15m\ \kappa\alpha\iota\ x''_3 = 0{,}65m$

Τα σημεία αυτά αρχίζουν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή $t_{o3} = \frac{x_3}{\upsilon} = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75s$ με πλάτος A_o=1cm , και επειδή έχουμε ενισχυτική συμβολή, θα έχουν πλάτος $2A_o$,τη χρονική στιγμή 3,25s.

Η εξίσωση ταλάντωσης τους είναι

$$\begin{cases} 0 \le t < 0{,}75s \ \ : z = 0 \\ 0{,}75s \le t \ \le 3{,}25s \ : z = A_o \eta\mu\omega(t-0{,}75) = 0.01\cdot\eta\mu 2{,}5(t-0.75)\ \ s.i. \end{cases}$$

Και για t>3.25s έχουμε ενισχυτική συμβολή , άρα

$$z = 2A_o\eta\mu\omega(t-3{,}25) = 0.02\cdot\eta\mu 2{,}5(t-3{,}25)\ s.i.$$

4.

Η μάζα m κάνει ελεύθερη πτώση, άρα $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh} = 2m/s$

Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση: $mv_1 = (m+M)V \Rightarrow V = 0.5m/s$

Η απομάκρυνση του κέντρου μάζας του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή που αρχίζουν την ταλάντωσή τους είναι

$$z = \Delta l_1 - \Delta l_o = 1.6m - 1.2m = 0.4m$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dz^2 + \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow$

$$A=\sqrt{z^2+\frac{(m+M)V^2}{D}}=\sqrt{0.16+\frac{4\cdot 0.25}{25}}=\sqrt{0.2}m=0.44m$$