

Ένα από τα σημαντικότερα πράγματα που πρέπει να γνωρίζουμε στο στερεό είναι να μπορούμε να βρίσκουμε τις επιταχύνσεις που έχουν τα διάφορα σώματα ανάλογα με τον τρόπο κίνησής τους καθώς και τον τρόπο με τον οποίο συνδυάζονται οι επιταχύνσεις κατά τις κινήσεις δύο ή περισσοτέρων σωμάτων. Ας πάμε να δούμε με μερικά παραδείγματα πώς γίνεται αυτό. Οι γενικοί κανόνες που έχω στο μυαλό μου είναι:

Κανόνας 1^{ος}: Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση έχει μόνο γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$.

Τα διάφορα σημεία του στερεού έχουν επιτρόχια επιτάχυνση (a_{ϵ}) (και κεντρομόλο επιτάχυνση (a_{κ}) η οποία δεν μας ενδιαφέρει συνήθως στη σύνδεση των επιταχύνσεων. Στο παρόν κείμενο δεν ασχολούμαστε καθόλου με την κεντρομόλο επιτάχυνση). Η επιτρόχια επιτάχυνση με την γωνιακή επιτάχυνση συνδέονται με τη σχέση $a_{\epsilon} = \alpha_{\gamma}R$, όπου R η ακτίνα της κυκλικής κίνησης του σημείου που με ενδιαφέρει.

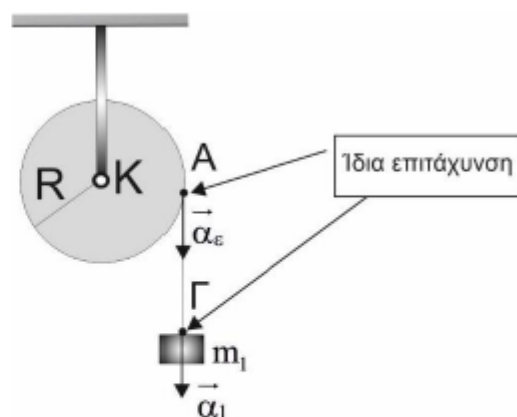
Κανόνας 2^{ος}: Όταν ένα στερεό σώμα (ή σημειακό) εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση έχει μόνο επιτάχυνση (μεταφορική) (a).

Κανόνας 3^{ος}: Όταν ένα στερεό σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση (και συγκεκριμένα Κ.Χ.Ο.) τότε έχει και γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και επιτάχυνση κέντρου μάζας a_{cm} . Οι δύο αυτές επιταχύνσεις συνδέονται με τη σχέση $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$ όπου R η ακτίνα του σημείου του οποίου η συνολική του ταχύτητα είναι μηδέν. Τέτοιο σημείο είναι, όταν η κίνηση του στερεού γίνεται σε επαφή με το έδαφος, το σημείο επαφής με το έδαφος.

Τα διάφορα σημεία του στερεού στην περίπτωση αυτή έχουν (λογικά) επιτρόχιο επιτάχυνση (a_{ϵ}) και επιτάχυνση κέντρου μάζας (a_{cm}) και ανάλογα με τη θέση που βρίσκονται τα σημεία αυτά τις προσθέτω ή τις αφαιρώ για να βρω τη συνολική εφαπτομενική επιτάχυνση του σημείου (με την κεντρομόλο επιτάχυνση δεν ασχολούμαι!).

Παράδειγμα 1^ο : Τροχαλία – Σώμα

Όταν αφήσουμε ελεύθερο να κινηθεί το διπλανό σύστημα, θα παρατηρήσουμε ότι το σώμα μάζας m_1 θα αρχίσει να κατεβαίνει με επιτάχυνση a_1 (λόγω μόνο μεταφορικής κίνησης που κάνει) και η τροχαλία θα αρχίσει να περιστρέφεται έχοντας μόνο $a_{γων}$ (λόγω μόνο της περιστροφικής κίνησης που κάνει). Το σημείο A της τροχαλίας έχει επιτρόχια επιτάχυνση ίση με $a_\epsilon = a_\gamma R$ (R η ακτίνα περιστροφής του σημείου A) (Η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου A δεν με ενδιαφέρει).

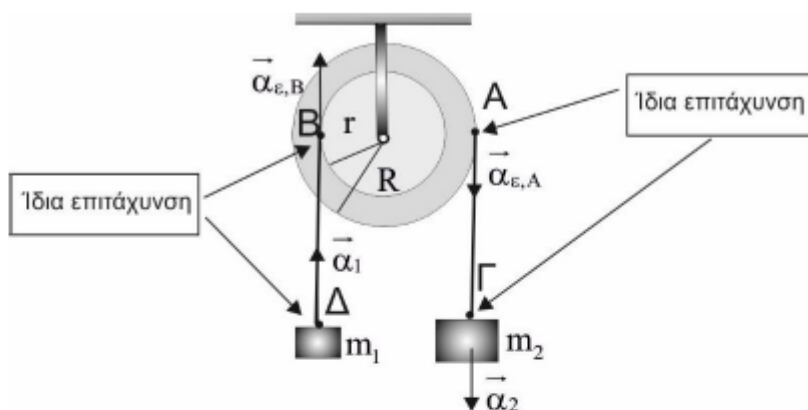


Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό (αυτό σε κάθε πρόβλημα θα συμβαίνει) οι επιταχύνσεις των σημείων A και Γ θα είναι ίσες. Άρα για το πρόβλημα αυτό ισχύει:

$$a_1 = a_\epsilon = a_\gamma R$$

Παράδειγμα 2^ο : Διπλή Τροχαλία – Σώματα

Όταν αφήσουμε ελεύθερο να κινηθεί το διπλανό σύστημα, θα παρατηρήσουμε ότι το σώμα μάζας m_2 ($m_2 > m_1$) θα αρχίσει να κατεβαίνει με επιτάχυνση a_2 (λόγω μόνο μεταφορικής κίνησης που κάνει), η τροχαλία θα αρχίσει να περιστρέφεται έχοντας μόνο $a_{γων}$ (λόγω μόνο της περιστροφικής κίνησης που κάνει) και το σώμα μάζας m_1 θα αρχίσει να ανεβαίνει με επιτάχυνση a_1 (λόγω μόνο μεταφορικής κίνησης που κάνει).



Το σημείο A της τροχαλίας έχει επιτρόχια επιτάχυνση ίση με $a_{ε,A} = a_{γR}$ (R η ακτίνα περιστροφής του σημείου A). Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό (αυτό σε κάθε πρόβλημα θα συμβαίνει) οι επιταχύνσεις των σημείων A και Γ θα είναι ίσες. Άρα για το πρόβλημα αυτό ισχύει:

$$a_2 = a_{ε,A} = a_{γR}$$

Το σημείο B της τροχαλίας έχει επιτρόχια επιτάχυνση ίση με $a_{ε,B} = a_{γr}$ (r η ακτίνα περιστροφής του σημείου B). Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό (αυτό σε κάθε πρόβλημα θα συμβαίνει) οι επιταχύνσεις των σημείων B και Δ θα είναι ίσες. Άρα για το πρόβλημα αυτό ισχύει:

$$a_2 = a_{ε,A} = a_{γR}$$

Το σημείο B της τροχαλίας έχει επιτρόχια επιτάχυνση ίση με $a_{ε,B} = a_{γr}$ (r η ακτίνα περιστροφής του σημείου B). Επειδή το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό (αυτό σε κάθε πρόβλημα θα συμβαίνει) οι επιταχύνσεις των σημείων B και Δ θα είναι ίσες. Άρα για το πρόβλημα αυτό ισχύει:

$$a_1 = a_{ε,B} = a_{γr}$$

(Σχόλιο: Με τις κεντρομόλους επιταχύνσεις των σημείων A και B δεν ασχολούμαι).

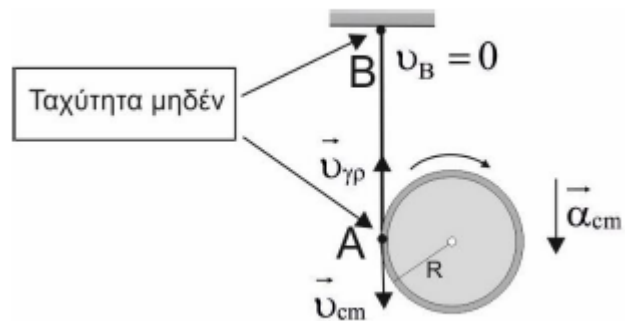
Προφανώς στο πρόβλημα αυτό οι επιταχύνσεις των σωμάτων a_1 και a_2 δεν θα είναι ίσες!

!!!SOS Συμπέρασμα πρώτο: Όταν ένα σώμα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση και υπάρχει και ένας άλλος δίσκος που εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση και συνδέονται με νήμα οι επιταχύνσεις που υπάρχουν στα δύο σώματα συνδέονται με τη σχέση:

$$a = a_{γων}R \text{ όπου } R \text{ η ακτίνα περιστροφής του σημείου του δίσκου που δένεται το νήμα.}$$

Παράδειγμα 3^ο : Μονό γιο γιο με νήμα δεμένο σε ακλόνητο σημείο

Το γιο γιο του διπλανού σχήματος είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο και όταν αφηθεί ελεύθερο θα κάνει σύνθετη κίνηση αποκτώντας επιτάχυνση κέντρου μάζας a_{cm} και γωνιακή επιτάχυνση $a_{γων}$. Επειδή το σημείο B είναι ακλόνητα στερεωμένο στο ταβάνι θα έχει ταχύτητα (και επιτάχυνση) μηδενική. Το σημείο A θα έχει και αυτό (λόγω αβαρούς και μη εκτατού νήματος) ταχύτητα μηδέν. Όμως το σημείο A έχει ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης v_{cm} και ταχύτητα λόγω περιστροφικής κίνησης $v_{γρ}$. Θα ισχύει:



$$v_A = 0 \text{ και } v_{cm} = v_{γρ}.$$

Όμως η γραμμική ταχύτητα του σημείου A ακτίνας περιστροφής R θα είναι ίση με $v_{γρ} = \omega R$. Συνεπώς προκύπτει:

$$v_{cm} = v_{γρ} = \omega R.$$

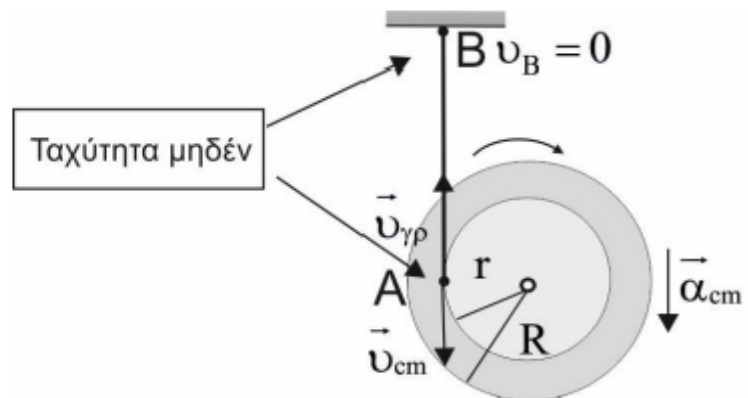
Ότι ισχύει για τις ταχύτητες θα ισχύει και για τις επιταχύνσεις άρα για το σημείο A που έχει επιταχύνσεις a_{cm} και a_e θα ισχύει:

$$a_{cm} = a_e = a_{γR}.$$

Παράδειγμα 4^ο : Διπλό γιο γιο με νήμα δεμένο σε ακλόνητο σημείο

Το διπλό γιο γιο του διπλανού σχήματος είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο και όταν αφηθεί ελεύθερο θα κάνει σύνθετη κίνηση αποκτώντας επιτάχυνση κέντρου μάζας a_{cm} και γωνιακή επιτάχυνση $a_{γων}$.

Επειδή το σημείο B είναι ακλόνητα στερεωμένο στο ταβάνι θα έχει ταχύτητα (και επιτάχυνση) μηδενική.



Το σημείο A θα έχει και αυτό (λόγω αβαρούς και μη εκτατού νήματος) ταχύτητα μηδέν. Όμως το σημείο A έχει ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης v_{cm} και ταχύτητα λόγω περιστροφικής κίνησης $v_{\gamma\rho}$. Θα ισχύει:

$$v_A = 0 \text{ και } v_{cm} = v_{\gamma\rho}.$$

Όμως η γραμμική ταχύτητα του σημείου A ακτίνας περιστροφής r θα είναι ίση με $v_{\gamma\rho} = \omega r$. Συνεπώς προκύπτει:

$$v_{cm} = v_{\gamma\rho} = \omega r.$$

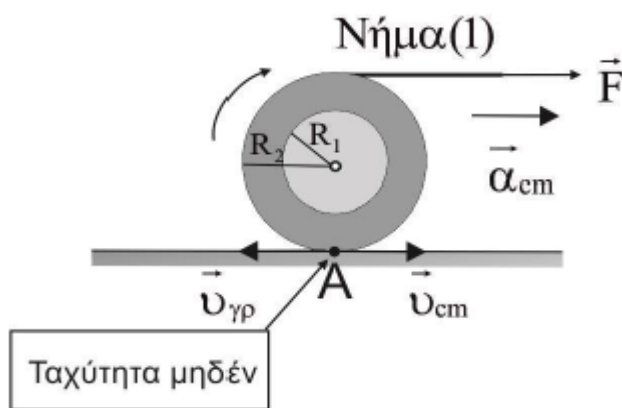
Ότι ισχύει για τις ταχύτητες θα ισχύει και για τις επιταχύνσεις άρα για το σημείο A που έχει επιταχύνσεις a_{cm} και a_ϵ θα ισχύει:

$$a_{cm} = a_\epsilon = a_\gamma r.$$

Παράδειγμα 5^ο : Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο δάπεδο (I)

Η διπλή τροχαλία του διπλανού σχήματος με τη βοήθεια ενός νήματος και κατάλληλης δύναμης F μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο αποκτώντας επιτάχυνση κέντρου μάζας a_{cm} και γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\upsilon}$.

Επειδή το σημείο A είναι το σημείο επαφής με το έδαφος θα έχει ταχύτητα (και επιτάχυνση) μηδενική.



Το σημείο A έχει ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης v_{cm} και ταχύτητα λόγω περιστροφικής κίνησης $v_{\gamma\rho}$. Θα ισχύει:

$$v_A = 0 \text{ και } v_{cm} = v_{\gamma\rho}.$$

Όμως η γραμμική ταχύτητα του σημείου A ακτίνας περιστροφής R_2 θα είναι ίση με $v_{\gamma\rho} = \omega R_2$. Συνεπώς προκύπτει:

$$v_{cm} = v_{\gamma\rho} = \omega R_2.$$

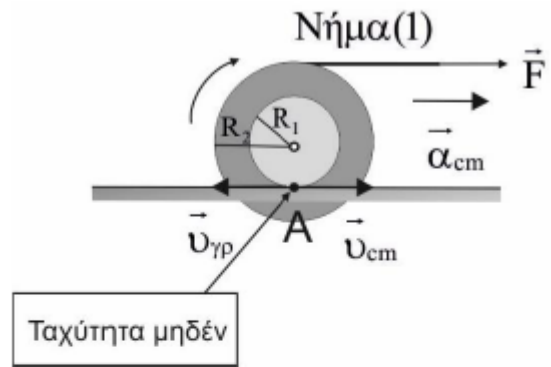
Ότι ισχύει για τις ταχύτητες θα ισχύει και για τις επιταχύνσεις άρα για το σημείο A που έχει επιταχύνσεις a_{cm} και a_ϵ θα ισχύει:

$$a_{cm} = a_\epsilon = a_\gamma R_2.$$

Παράδειγμα 6° : Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο δάπεδο (II)

Η διπλή τροχαλία του διπλανού σχήματος με τη βοήθεια ενός νήματος και κατάλληλης δύναμης F μπορεί να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο αποκτώντας επιτάχυνση κέντρου μάζας a_{cm} και γωνιακή επιτάχυνση $a_{γων}$.

Επειδή το σημείο A είναι το σημείο επαφής με το έδαφος θα έχει ταχύτητα (και επιτάχυνση) μηδενική.



Το σημείο A έχει ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης v_{cm} και ταχύτητα λόγω περιστροφικής κίνησης $v_{\gamma p}$. Θα ισχύει:

$$v_A = 0 \text{ και } v_{cm} = v_{\gamma p}.$$

Όμως η γραμμική ταχύτητα του σημείου A ακτίνας περιστροφής R_2 θα είναι ίση με $v_{\gamma p} = \omega R_1$. Συνεπώς προκύπτει:

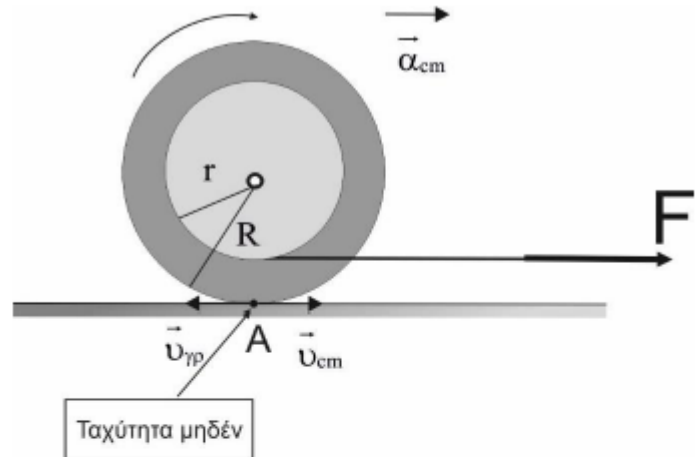
$$v_{cm} = v_{\gamma p} = \omega R_1.$$

Ότι ισχύει για τις ταχύτητες θα ισχύει και για τις επιταχύνσεις άρα για το σημείο A που έχει επιταχύνσεις a_{cm} και $a_ε$ θα ισχύει:

$$a_{cm} = a_ε = a_{\gamma} R_1.$$

Παράδειγμα 7^ο : Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο δάπεδο (II)

Η διπλή τροχαλία του διπλανού σχήματος με τη βοήθεια ενός νήματος και κατάλληλης δύναμης F μπορεί να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο αποκτώντας επιτάχυνση κέντρου μάζας a_{cm} και γωνιακή επιτάχυνση $a_{γων}$.



ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διπλή τροχαλία αρχίζει να κινείται μεταφορικά προς τα δεξιά και να στρέφεται δεξιόστροφα προκειμένου το σημείο επαφής A με το έδαφος να έχει ταχύτητα (και επιτάχυνση) μηδενική.

Το σημείο A έχει ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης v_{cm} και ταχύτητα λόγω περιστροφικής κίνησης $v_{\gamma\rho}$. Θα ισχύει:

$$v_A = 0 \text{ και } v_{cm} = v_{\gamma\rho}.$$

Όμως η γραμμική ταχύτητα του σημείου A ακτίνας περιστροφής R θα είναι ίση με $v_{\gamma\rho} = \omega R$. Συνεπώς προκύπτει:

$$v_{cm} = v_{\gamma\rho} = \omega R.$$

Ότι ισχύει για τις ταχύτητες θα ισχύει και για τις επιταχύνσεις άρα για το σημείο A που έχει επιταχύνσεις a_{cm} και a_ϵ θα ισχύει:

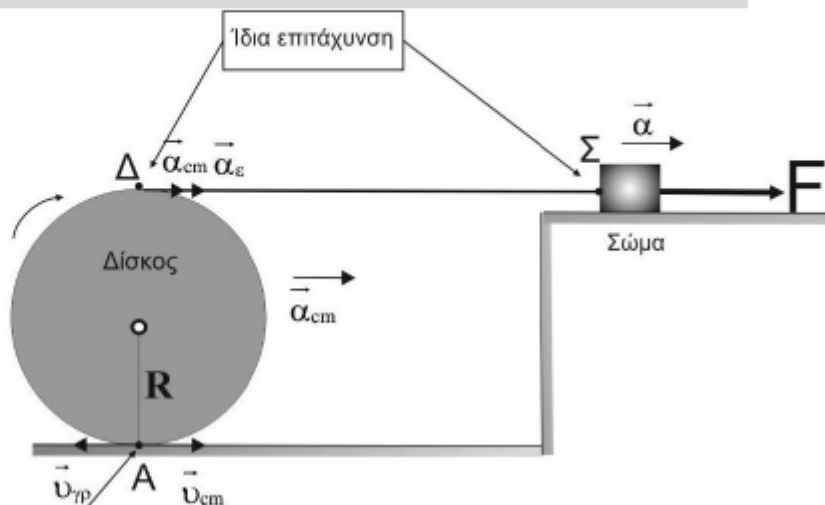
$$a_{cm} = a_\epsilon = a_\gamma R.$$

!!!SOS Συμπέρασμα δεύτερο: Όταν ένα σώμα εκτελεί ΚΧΟ υπάρχουν οι επιταχύνσεις a_{cm} και $a_{γων}$ που συνδέονται με τη σχέση:

$a_{cm} = a_{γων}R$ όπου R η ακτίνα περιστροφής του σημείου που έχει ταχύτητα μηδέν (αυτό το σημείο είναι το σημείο επαφής με το έδαφος).

Παράδειγμα 8^ο : Δίσκος κυλιέται χωρίς ολίσθηση και μέσω νήματος άλλο σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση (I)

Νήμα είναι τυλιγμένο στο αυλάκι ενός δίσκου ακτίνας R και το ελεύθερο του άκρο καταλήγει σε σώμα Σ . Στο σώμα Σ ασκείται δύναμη F , οπότε το σώμα Σ αρχίζει να κινείται με επιτάχυνση a , και ο δίσκος να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει με επιταχύνσεις a_{cm} και $a_{γων}$.



Πρώτη μου δουλειά είναι να συνδυάσω τις επιταχύνσεις a_{cm} και $a_{γων}$ του δίσκου που κάνει Κ.Χ.Ο. Αυτό γίνεται εντοπίζοντας ποιο σημείο έχει ταχύτητα μηδέν. Αυτό το σημείο είναι το σημείο επαφής του δίσκου με το δάπεδο (σημείο Α). Για το σημείο αυτό ισχύει: $v_{cm} = v_{\gamma\rho} = \omega R$. Επομένως:

$$a_{cm} = a_{γων}R$$

Δεύτερη μου δουλειά είναι να συσχετίσω την επιτάχυνση a του σώματος Σ με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου (a_{cm}). Για το σκοπό βρίσκω ποιο σημείο του νήματος καταλήγει στο σώμα (σημείο Σ) και ποιο καταλήγει στο δίσκο (σημείο Δ). Τα σημεία αυτά έχουν την ίδια επιτάχυνση.

Για το σημείο Σ του σώματος Σ ισχύει: $a_{\Sigma} = a$

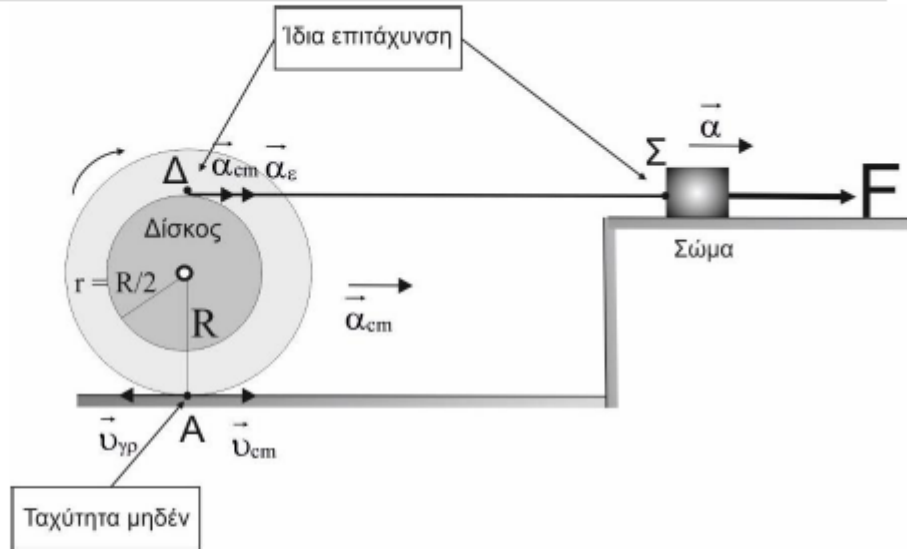
Για το σημείο Δ του δίσκου ισχύει ότι έχει δύο επιταχύνσεις ίδιας μάλλιστα κατεύθυνσης. Την επιτάχυνση a_{cm} και την επιτάχυνση $a_{\epsilon} = a_{\gamma}R$. Επομένως:

$$a_{\Delta} = a_{cm} + a_{\epsilon} = a_{γων}R + a_{γων}R = 2 a_{γων}R = 2a_{cm}.$$

Τελικά: $a_{\Delta} = a_{\Sigma}$, άρα: $a = 2a_{cm}$

Παράδειγμα 9^ο : Σώμα κυλιέται χωρίς ολίσθηση και μέσω νήματος άλλο σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση (II)

Δίσκος ακτίνας R έχει αυλάκι ακτίνας $r = R/2$ γύρω από το οποίο είναι τυλιγμένο νήμα και το ελεύθερο του άκρο καταλήγει σε σώμα Σ . Στο σώμα Σ ασκείται δύναμη F , οπότε το σώμα Σ αρχίζει να κινείται με επιτάχυνση α , και ο δίσκος να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει με επιταχύνσεις a_{cm} και $\alpha_{γων}$.



Πρώτη μου δουλειά είναι να συνδυάσω τις επιταχύνσεις a_{cm} και $\alpha_{γων}$ του δίσκου που κάνει Κ.Χ.Ο. Αυτό γίνεται εντοπίζοντας ποιο σημείο έχει ταχύτητα μηδέν. Αυτό το σημείο είναι το σημείο επαφής του δίσκου με το δάπεδο (σημείο Α). Για το σημείο αυτό ισχύει: $v_{cm} = v_{γρ} = \omega R$. Επομένως:

$$a_{cm} = \alpha_{γων} R$$

Δεύτερη μου δουλειά είναι να συσχετίσω την επιτάχυνση α του σώματος Σ με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου (a_{cm}). Για το σκοπό βρίσκω ποιο σημείο του νήματος καταλήγει στο σώμα (σημείο Σ) και ποιο καταλήγει στο δίσκο (σημείο Δ). Τα σημεία αυτά έχουν την ίδια επιτάχυνση.

Για το σημείο Σ του σώματος Σ ισχύει: $a_{\Sigma} = \alpha$

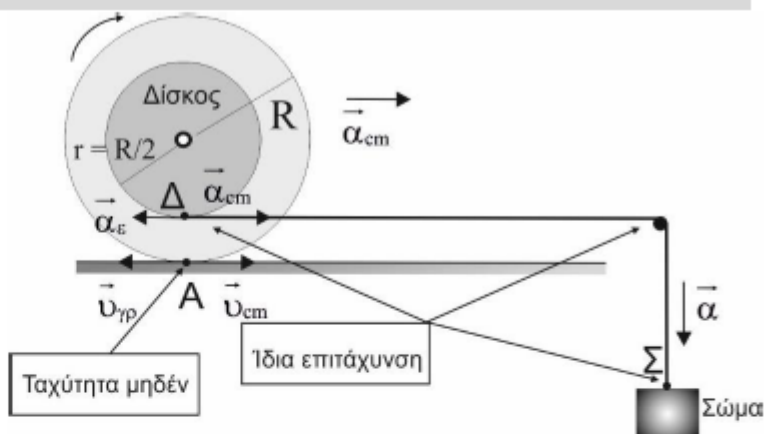
Για το σημείο Δ του δίσκου ισχύει ότι έχει δύο επιταχύνσεις ίδιας μάλλιστα κατεύθυνσης. Την επιτάχυνση a_{cm} και την επιτάχυνση $\alpha_{\epsilon} = \alpha_{γων} \cdot \frac{R}{2}$. Επομένως:

$$a_{\Delta} = a_{cm} + \alpha_{\epsilon} = \alpha_{γων} R + \alpha_{γων} \cdot \frac{R}{2} = \frac{3}{2} \alpha_{γων} R = \frac{3}{2} a_{cm}$$

Τελικά: $a_{\Delta} = a_{\Sigma}$, άρα: $\alpha = \frac{3}{2} a_{cm}$

Παράδειγμα 10^ο : Σώμα κυλιέται χωρίς ολίσθηση και μέσω νήματος άλλο σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση (III)

Δίσκος ακτίνας R έχει αυλάκι ακτίνας $r = R/2$ γύρω από το οποίο είναι τυλιγμένο νήμα και το ελεύθερο του άκρο καταλήγει μέσω καρφιού σε σώμα Σ . Αφήνουμε ελεύθερο να πέσει το σώμα Σ , οπότε το σώμα Σ αρχίζει να κινείται με επιτάχυνση a , και ο δίσκος να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει με επιταχύνσεις a_{cm} και $a_{γων}$. Προς τα δεξιά η μεταφορική του κίνηση και δεξιόστροφα η στροφική του κίνηση προκειμένου το σημείο A να έχει ταχύτητα μηδέν.



Πρώτη μου δουλειά είναι να συνδυάσω τις επιταχύνσεις a_{cm} και $a_{γων}$ του δίσκου που κάνει ΚΧΟ. Αυτό γίνεται εντοπίζοντας ποιο σημείο έχει ταχύτητα μηδέν. Αυτό το σημείο είναι το σημείο επαφής του δίσκου με το δάπεδο (σημείο A). Για το σημείο αυτό ισχύει: $v_{cm} = v_{\gamma\rho} = \omega R$. Επομένως:

$$a_{cm} = a_{γων}R$$

Δεύτερη μου δουλειά είναι να συσχετίσω την επιτάχυνση a του σώματος Σ με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου (a_{cm}). Για το σκοπό βρίσκω ποιο σημείο του νήματος καταλήγει στο σώμα (σημείο Σ) και ποιο καταλήγει στο δίσκο (σημείο Δ). Τα σημεία αυτά έχουν την ίδια επιτάχυνση.

Για το σημείο Σ του σώματος Σ ισχύει: $a_{\Sigma} = a$

Για το σημείο Δ του δίσκου ισχύει ότι έχει δύο επιταχύνσεις αντίθετης μάλιστα κατεύθυνσης. Την επιτάχυνση a_{cm} και την επιτάχυνση $a_{\epsilon} = a_{γων} \cdot \frac{R}{2}$. Επομένως:

$$a_{\Delta} = a_{cm} - a_{\epsilon} = a_{γων}R - a_{γων} \cdot \frac{R}{2} = \frac{a_{γων}R}{2} = \frac{a_{cm}}{2}.$$

$$\text{Τελικά: } a_{\Delta} = a_{\Sigma}, \text{ άρα: } a = \frac{a_{cm}}{2}$$

!!!SOS Συμπέρασμα τρίτο: Όταν ένα σώμα εκτελεί ΚΧΟ και ένα άλλο σώμα μεταφορική κίνηση βρίσκω τη σχέση που συνδέει τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων:

Την επιτάχυνση a με την επιτάχυνση a_{cm} .

Αυτό γίνεται βρίσκοντας την συνολική επαπτομενική επιτάχυνση του σημείου του δίσκου που μέσω του νήματος καταλήγει στο σώμα.