ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1. Κύβος μάζας $m = 1$ kg είναι δεμένος στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 100$ N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Ο κύβος αρχικά ισορροπεί σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Μετακινούμε τον κύβο ώστε να συμπιέσει το ελατήριο και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ τον αφήνουμε ελεύθερο. Τη χρονική στιγμή $t = \pi/15$ s το σώμα έχει διανύσει διάστημα $s = 30$ cm. Το πλάτος της ταλάντωσης του κύβου είναι:

α. $A = 30$ cm
β. $A = 20$ cm
γ. $A = 10$ cm

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 3\pi/2$ και η γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ rad/s}$$

άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \xrightarrow{t=\pi/15\text{ s}} x = A\eta\mu\left(10\frac{\pi}{15} + \frac{3\pi}{2}\right) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) = A\eta\mu\frac{13\pi}{6} \Rightarrow$$

$$x = A\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{A}{2}$$

Από τη θέση $x = -A$ έως τη θέση $x = A/2$ το διανυθέν διάστημα είναι:

$$s = 3\frac{A}{2} \Rightarrow A = \frac{2s}{3} \Rightarrow A = 20 \text{ cm}$$

2. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 0{,}5$ s. Τη στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας Ο, κινούμενο κατά τη θετική φορά. Η αλγεβρική τιμή της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα δίνεται από την εξίσωση $F = -800x$ (SI). Στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = T/12$, η κινητική ενέργεια του σώματος ελαττώνεται κατά 1 J. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

α. $A = 0{,}1$ m
β. $A = 0{,}2$ m
γ. $A = 0{,}4$ m

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **α**.

Αιτιολόγηση

Η ταλάντωση έχει σταθερά επαναφοράς $D = 800$ N/m και μηδενική αρχική φάση.

$$x = Αημωt \xrightarrow{t=T/12} x = \frac{A}{2} \Rightarrow U = \frac{1}{4}E$$

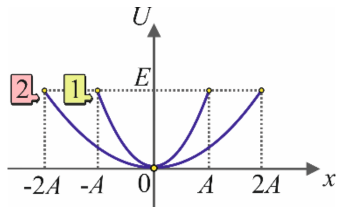
Είναι:

$$ΔK = -1\text{ J} \Rightarrow ΔU = 1\text{ J} \Rightarrow U - 0 = 1\text{ J} \Rightarrow \frac{1}{4}E = 1\text{ J} \Rightarrow E = 4\text{ J}$$

Επομένως:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{D}} \Rightarrow A = 0{,}1\text{ m}$$

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διαγράμματα της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση, $U = f(x)$, για δύο συστήματα μάζας - ελατηρίου που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Αν γνωρίζουμε ότι οι περίοδοι ταλάντωσης συνδέονται με τη σχέση $T_1/T_2 = 1/2$, τότε ο λόγος των μαζών m_1/m_2 είναι ίσος με:



α. 2
β. 1
γ. 1/2

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση

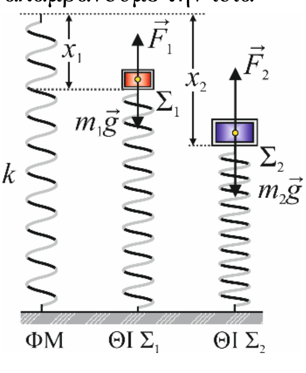
Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$U_{1(max)} = U_{2(max)} \Rightarrow \frac{1}{2}k_1A^2 = \frac{1}{2}k_2(2A)^2 \Rightarrow k_1 = 4k_2$$

Επομένως ο λόγος των περιόδων είναι:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{m_1/k_1}}{2\pi\sqrt{m_2/k_2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{m_1k_2}{m_2 4k_2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 1$$

4. Ένα ιδανικό ελατήριο είναι στερεωμένο κατακόρυφα σε οριζόντιο δάπεδο. Στο πάνω άκρο του ελατηρίου, το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, αφήνουμε ένα σώμα $Σ_1$, μάζας m και το σύστημα εκτελεί αμείωτη αρμονική ταλάντωση. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με ένα άλλο σώμα $Σ_2$, μάζας $4m$. Αν συμβολίσουμε με $a_{max\,(1)}$, $a_{max\,(2)}$ τα πλάτη των επιταχύνσεων των σωμάτων κατά την ταλάντωσή τους τότε ο λόγος $a_{max\,(1)}/a_{max\,(2)}$ ισούται με:



α. 1
β. 2
γ. 4

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **α**.

Αιτιολόγηση

Η μέγιστη επιτάχυνση είναι:

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Σε κάθε περίπτωση, η παραμόρφωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας είναι ίση με το πλάτος της ταλάντωσης:

$$mg = kA_1 \Rightarrow A_1 = mg/k$$

$$4mg = kA_2 \Rightarrow A_2 = 4mg/k$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{a_{max(1)}}{a_{max(2)}} = \frac{\frac{k}{m}A_1}{\frac{k}{4m}A_2} = \frac{4A_1}{A_2} = \frac{4\frac{mg}{k}}{\frac{4mg}{k}} \Rightarrow \frac{a_{max(1)}}{a_{max(2)}} = 1$$

5. Ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k έχει το πάνω άκρο του στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και ενώ αυτό βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους, στερεώνεται μάζα m. Από τη θέση αυτή το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης του σώματος είναι ίση με:

α. m^2g^2/k

β. $2m^2g^2/k$

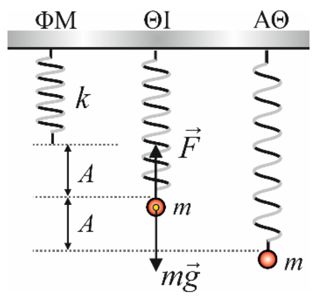
γ. $m^2g^2/2k$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση



Στη θέση ισορροπίας (ΘΙ) η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι Δl.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \quad (1)$$

Αλλά η θέση φυσικού μήκους είναι μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης, αφού $\upsilon = 0$, οπότε η απόστασή της από τη θέση ισορροπίας ισούται με το πλάτος:

$$\Delta l = A$$

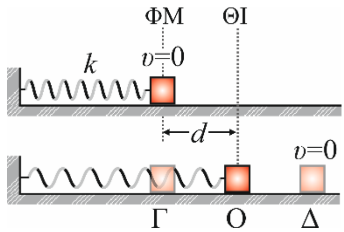
Η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στη δύναμη του ελατηρίου γίνεται μέγιστη όταν η επιμήκυνση του ελατηρίου γίνει μέγιστη (στην κατώτερη θέση)

$$\Delta l_{max} = 2A$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda(max)} = \frac{1}{2}k(2\Delta l_{max})^2 \Rightarrow$$

$$U_{\varepsilon\lambda(max)} = \frac{1}{2}k\left(2\frac{mg}{k}\right)^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda(max)} = \frac{1}{2}k \cdot 4\frac{m^2g^2}{k^2} \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda(max)} = 2\frac{m^2g^2}{k}$$

6. Αρχικά το σώμα είναι ακίνητο στη θέση Γ όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη F η οποία καταργείται όταν μηδενιστεί η ταχύτητα για πρώτη φορά, στη θέση Δ. Στη συνέχεια το σώμα κινείται και επιστρέφει στο Γ. Η κίνηση από το Γ στο Δ διαρκεί χρόνο Δt_1 ενώ η κίνηση από το Δ στο Γ διαρκεί χρόνο Δt_2. Ισχύει:



α. $\Delta t_1 = \Delta t_2$
β. $\Delta t_2 = 2\Delta t_1$
γ. $\Delta t_1 = 2\Delta t_2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **γ**.

Αιτιολόγηση

Όσο ασκείται η δύναμη F (κίνηση από το Γ στο Δ) το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με:

- θέση ισορροπίας το O: $F = kd$
- πλάτος: $A = d$
- περίοδο: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

$$\Delta t_1 = \frac{T}{2}$$

Μετά την κατάργηση της F το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με:

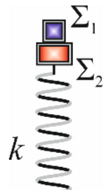
- θέση ισορροπίας το Γ = θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου
- πλάτος: $A' = 2d$
- περίοδο: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

$$\Delta t_2 = \frac{T}{4}$$

Επομένως:

$$\Delta t_1 = 2\Delta t_2$$

7. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του σχήματος έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Το σώμα Σ_1 βρίσκεται πάνω στο Σ_2. Το σώμα Σ_2 είναι στερεωμένο στο πάνω άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο. Αφαιρούμε απότομα το σώμα Σ_1, οπότε το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ως πάνω ακραία θέση τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Τη στιγμή που το ελατήριο είναι μέγιστα συμπιεσμένο, ο λόγος της ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος Σ_2-k προς την ενέργεια του ελατηρίου, E/U, είναι:



α. $1/4$
β. $1/2$
γ. 1

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

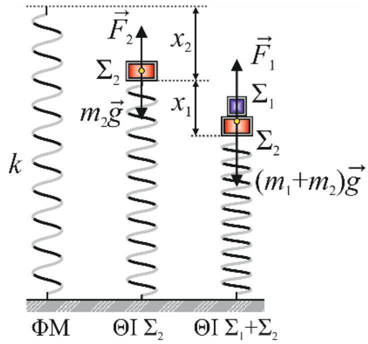
ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **α**.

Αιτιολόγηση

Όταν αφαιρέσουμε το Σ_1, το Σ_2 ξεκινά να ταλαντώνεται κατακόρυφα, χωρίς ταχύτητα, γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας του. Επομένως το πλάτος ταλάντωσης είναι

$$A = x_1$$



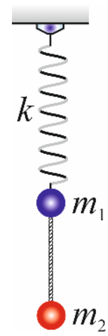
Το Σ_2 φτάνει μέχρι τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, άρα:

$$2A = x_1 + x_2 \Rightarrow 2x_1 = x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Τη στιγμή που το ελατήριο είναι μέγιστα συμπιεσμένο, έχουμε:

$$\frac{E}{U} = \frac{\frac{1}{2}kx_1^2}{\frac{1}{2}k(x_1+x_2)^2} = \frac{x_1^2}{(x_1+x_1)^2} \Rightarrow \frac{E}{U} = \frac{1}{4}$$

8. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του διπλανού σχήματος ισορροπούν. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει τα σώματα και τότε το σώμα Σ_1 κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Όταν η ταχύτητα του Σ_1 μηδενίζεται για πρώτη φορά, το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων είναι:



α. $m_1/m_2 = 2$
β. $m_1/m_2 = 3/2$
γ. $m_1/m_2 = 1$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το γ.

Αιτιολόγηση

Αρχικά τα σώματα ισορροπούν και η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι:

$$\Delta l = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \quad (1)$$

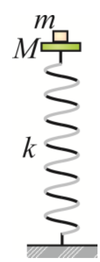
Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα Σ_1 θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Το σώμα ξεκινά από ακραία θέση και όταν φτάνει στην άνω ακραία θέση έχει διανύσει διάστημα ίσο με $2A = \Delta l$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης.
Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης βρίσκεται στο μέσον των δύο ακραίων θέσεων όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση ίση με A. Για τη θέση ισορροπίας του Σ_1 ισχύει:

$$m_1 g = kA \Rightarrow m_1 g = k\frac{\Delta l}{2} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$m_1 g = \frac{1}{2}k\frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow 2m_1 = m_1 + m_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

9. Δίσκος μάζας M είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, και ισορροπεί, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στο έδαφος. Στο δίσκο τοποθετούμε χωρίς αρχική ταχύτητα σώμα μάζας m. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:



α. $\frac{1}{2}\frac{m^2}{k}g^2$

β. $\frac{1}{2}\frac{M^2}{k}g^2$

γ. $\frac{1}{2}\frac{(m+M)^2}{k}g^2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

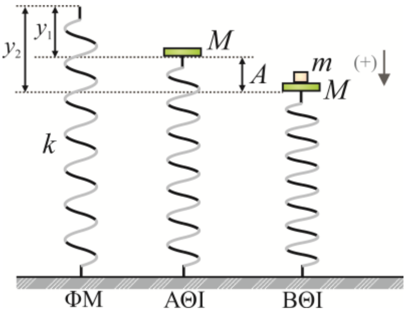
Σωστό είναι το **α**.

Αιτιολόγηση

ΑΘΙ: $\Sigma F = 0 \Rightarrow ky_1 - Mg = 0 \Rightarrow y_1 = Mg/k$

ΒΘΙ: $\Sigma F = 0 \Rightarrow ky_2 - (M+m)g = 0 \Rightarrow$

$$y_2 = (M+m)g/k$$



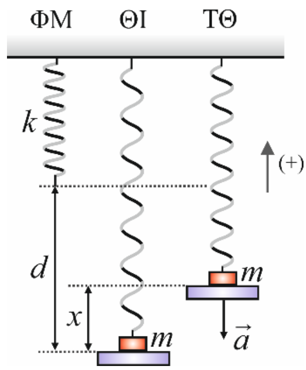
Τη στιγμή έναρξης της ταλάντωσης το σύστημα έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε ξεκινά την ταλάντωση από ακραία θέση. Επομένως:

$$A = y_2 - y_1 = \frac{(M+m)g}{k} - \frac{Mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

και

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}$$

10. Σώμα Σ μάζας m ισορροπεί κρεμασμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, έτσι ώστε το ελατήριο να είναι τεντωμένο κατά $d = 40$ cm. Πάμε το σώμα στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και τοποθετούμε κάτω από το σώμα μια πλατφόρμα σε επαφή με αυτό. Μπορούμε να ρυθμίζουμε την κίνηση της πλατφόρμας ώστε να κατέρχεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = 2g/5$.



Α. Τα σώματα αποχωρίζονται όταν η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι:

α. $\Delta l = 0$

β. $\Delta l = 2d/3$

γ. $\Delta l = 3d/5$

Β. Το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος μετά τον αποχωρισμό είναι:

α. $A = 4d/5$

β. $A = 2d/5$

γ. $A = d$

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις και να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.

ΛΥΣΗ

Χωρίς την πλατφόρμα το σώμα Σ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος ίσο με d και γωνιακή συχνότητα ω, ενώ η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με $F_{\varepsilon\pi} = -kx$.

Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$mg = kd \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{d} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{d}} = 5 \text{ rad/s}$$

Α. Σωστό είναι το **γ**.

Αιτιολόγηση

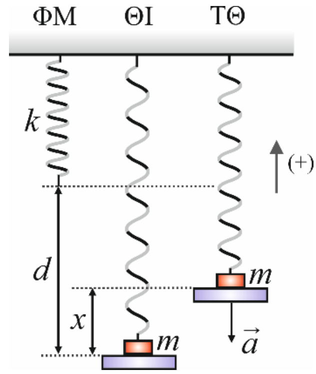
Το σώμα σε τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του m έχει επιτάχυνση $a = -\frac{2}{5}g$.

$$\Sigma F = ma \Rightarrow N + F_{\varepsilon\pi} = ma \Rightarrow N - kx = -m\frac{2}{5}g \Rightarrow$$

$N = kx + -\frac{2}{5}mg$

Αποχωρισμός:

$$N = 0 \Rightarrow kx - \frac{2}{5}mg = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}\frac{mg}{k} \Rightarrow x = \frac{2}{5}d \quad (1)$$



Η επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι:

$$\Delta l = d - \frac{2}{5}d \Rightarrow \Delta l = \frac{3}{5}d \quad (2)$$

Β. Σωστό είναι το **α**.

Αιτιολόγηση

Ώσπου να αποχωριστούν τα σώματα, το Σ κινείται με σταθερή επιτάχυνση και τη στιγμή του αποχωρισμού έχει ταχύτητα υ, ενώ έχει διανύσει διάστημα ίσο με Δl. Η συνισταμένη δύναμη στο Σ είναι σταθερή και έχει μέτρο:

$$\Sigma F = ma$$

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = W_{\Sigma F} = ma\Delta l \Rightarrow \upsilon^2 = 2\alpha\Delta l \quad (3)$$

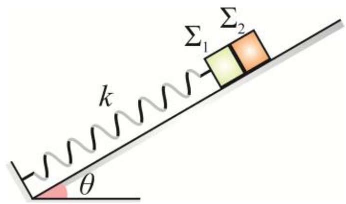
Μετά τον αποχωρισμό, το Σ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Τη στιγμή που το Σ αρχίζει την ταλάντωσή του μπορούμε να βρούμε την ενέργεια ταλάντωσης E:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$$

$$kA^2 = m2a\Delta l + kx^2 \Rightarrow kA^2 = 2mg \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}d + k\left(\frac{2}{5}d\right)^2 \Rightarrow$$

$$kA^2 = \frac{12}{25}kd^2 + \frac{4}{25}kd^2 \Rightarrow A^2 = \frac{16}{25}d^2 \Rightarrow A = \frac{4}{5}d$$

11. Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ είναι τοποθετημένα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2, αντίστοιχα, που εφάπτονται μεταξύ τους. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k, ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετακινώντας τα δύο σώματα προς τα κάτω, το σύστημα τίθεται σε ταλάντωση πλάτους A. Η συνθήκη για να μην αποχωριστεί το Σ_1 από το Σ_2 είναι:



α. $Ak < (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta$

β. $Ak > (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta$

γ. $Ak > (m_1 + m_2)^2 g\eta\mu\theta$

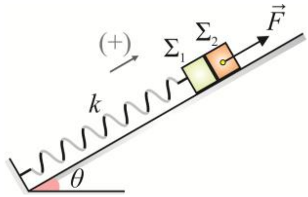
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **α**.

Αιτιολόγηση

Είναι $\omega^2 = k/(m_1 + m_2)$ και



$D_2 = m_2\omega^2 = \frac{km_2}{m_1+m_2}$

οπότε η συνισταμένη δύναμη πάνω στο σώμα m_2 είναι:

$$\Sigma F = -D_2 x \Rightarrow F - m_2 g\eta\mu\theta = -\frac{km_2}{m_1+m_2}x \Rightarrow$$

$$F = m_2 g\eta\mu\theta - \frac{km_2}{m_1+m_2}x$$

Η ελάχιστη τιμή της F λαμβάνεται στη θέση $x = +A$.
Για να μη χαθεί η επαφή, για την ελάχιστη τιμή της δύναμης πρέπει να ισχύει:

$$F_{min} > 0 \Rightarrow m_2 g\eta\mu\theta - \frac{km_2}{m_1+m_2}A > 0 \Rightarrow g\eta\mu\theta > \frac{k}{m_1+m_2}A \Rightarrow$$

$$Ak < (m_1+m_2)g\eta\mu\theta$$

12. Ένα σώμα Σ_1 μάζας m_1 είναι δεμένο στην άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A σε λείο οριζόντιο επίπεδο . Όταν το Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2. Αν η ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίση με το $1/4$ της ενέργειας της ταλάντωσης του Σ_1 πριν την κρούση, τότε ο λόγος m_1/m_2 των μαζών των δύο σωμάτων είναι ίσος με:

α. 3
β. $1/3$
γ. 1

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση

Από την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα κίνησης για το σύστημα των Σ_1 και Σ_2 έχουμε:

$$m_1 \upsilon_1 = (m_1+m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$$

Εφόσον η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας, η ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow (m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1\right)^2 = \frac{1}{4}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4m_1 = m_1+m_2 \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

13. Σώμα μάζας m ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου. Με το σώμα συμπιέζουμε το ελατήριο κατά Δl και το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Όταν το σώμα διανύσει διάστημα s

($s < \Delta l$) συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ένα σώμα μάζας M. Τα δύο σώματα λίγο πριν την κρούση έχουν αντίθετες ταχύτητες. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με διπλάσια περίοδο και με πλάτος A' για το οποίο ισχύει:

α. $A' > A$

β. $A' = A$

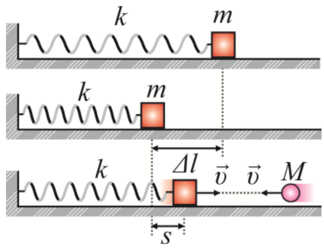
γ. $A' < A$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση



Αφού διπλασιάζεται η περίοδος ταλάντωσης σημαίνει πως τετραπλασιάστηκε η μάζα του ταλαντωτή

$$T' = 2T \Rightarrow M + m = 4m \Rightarrow M = 3m$$

ΑΔΟ για την κρούση:

$$M\upsilon - m\upsilon = (M+m)V \Rightarrow V = \frac{2m}{4m}\upsilon \Rightarrow V = \frac{\upsilon}{2}$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δεν αλλάζει, ούτε η σταθερά επαναφοράς, άρα ούτε η δυναμική ενέργεια αλλάζει. Θα δούμε αν αλλάζει η κινητική ενέργεια του ταλαντωτή.

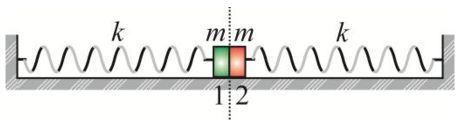
$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$K' = \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}4m(\frac{\upsilon}{2})^2 = \frac{1}{2}4m\frac{\upsilon^2}{4} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Παρατηρούμε ότι:

$$K = K' \Rightarrow E = E' \Rightarrow A' = A$$

14. Δύο όμοια σώματα 1 και 2, ίσων μαζών m το καθένα, συνδέονται με όμοια ιδανικά ελατήρια σταθεράς k το καθένα, των οποίων τα άλλα άκρα είναι συνδεδεμένα σε ακλόνητα σημεία, όπως στο σχήμα. Οι άξονες των δύο ελατηρίων βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος l_0 και το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο βρίσκονται είναι λείο. Μετακινούμε το σώμα 1 προς τα αριστερά κατά d και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Το σώμα 1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα 2. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = 2k$. Αν A_1 το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος 1 πριν τη κρούση και A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση, τότε ο λόγος A_1/A_2 είναι:



α. 1

β. $1/2$

γ. 2

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **γ**.

Αιτιολόγηση
Η κίνηση του m_1 πριν την κρούση είναι απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, σταθερά επαναφοράς $D = k_1 = k$ και γωνιακή συχνότητα ω_1:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Η κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D' = 2k$ και γωνιακή συχνότητα:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{2m}} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1$$

Πριν την κρούση το σώμα m_1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και έχει ταχύτητα υ:

$$\upsilon = \omega_1 A_1$$

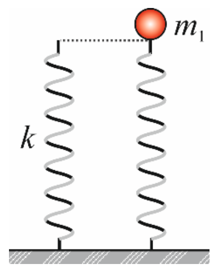
Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και έχει ταχύτητα V:

$$V = \omega_2 A_2$$

Εφαρμόζουμε ΑΔΟ και έχουμε:

$$m\upsilon = 2mV \Rightarrow \upsilon = 2V \Rightarrow \omega_1 A_1 = 2\omega_2 A_2 \Rightarrow A_1 = 2A_2$$

15. Σώμα μάζας m_1 είναι στερεωμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου. Αρχικά συγκρατούμε το σώμα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και κάποια στιγμή το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί και μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του για πρώτη φορά, διανύει διάστημα 20 cm. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο ένα σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = m_1/2$. Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά και μετά την κρούση το συσσωμάτωμα παραμένει ακίνητο. Το διάστημα που διάνυσε το σώμα Σ_2 από τη στιγμή που το αφήσαμε ελεύθερο είναι:



α. 10 cm
β. 15 cm
γ. 20 cm

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ
Σωστό είναι το **β**.
Αιτιολόγηση
Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν το σώμα φτάσει στην κάτω ακραία θέση. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι:

$$A = 0{,}1\ \text{m} = \frac{m_1 g}{k}$$

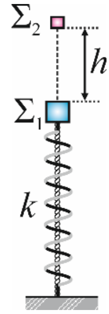
Για την κρούση των σωμάτων ισχύει η ΑΔΟ και αφού το συσσωμάτωμα παραμένει ακίνητο σημαίνει πως τα σώματα πριν την κρούση είχαν αντίθετες ορμές.

Η κρούση έγινε στην θέση ισορροπίας του συσσωματώματος η οποία βρίσκεται πιο κάτω από τη θέση ισορροπίας του m_1 κατά:

$$x = \frac{m_2 g}{k} = \frac{1}{2}\frac{m_1 g}{k} = \frac{A}{2}$$

Το σώμα Σ_2 έχει διανύσει διάστημα $s = 15$ cm

16. Σώμα Σ_1 μάζας m έχει προσδεθεί σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k, το κάτω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Το ελατήριο συσπειρώνεται και το σώμα Σ_1 ισορροπεί με τη βοήθεια μη εκτατού νήματος. Το μέτρο της τάσης του νήματος είναι διπλάσιο του βάρους του σώματος Σ_1. Κόβουμε το νήμα και το Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A_1. Από ύψος h πάνω από την αρχική θέση του Σ_1, αφήνεται σώμα Σ_2 μάζας m που συγκρούεται πλαστικά με το Σ_1 καθώς αυτό περνά από τη θέση ισορροπίας του ανερχόμενο. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία και κατόπιν αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A_2. Ο λόγος A_1/A_2 ισούται με:



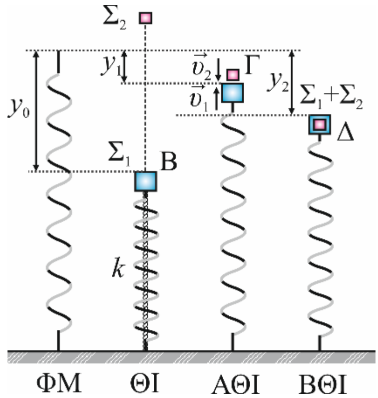
α. 1
β. 2
γ. 1/2

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση



Όταν το σώμα ισορροπεί με τη βοήθεια του νήματος ισχύει:

$$T + mg = ky_0 \Rightarrow 2mg + mg = ky_0 \Rightarrow$$
$$y_0 = 3mg/k$$

Στην αρχική θέση ισορροπίας ταλάντωσης Γ ισχύει:

$$mg = ky_1 \Rightarrow y_1 = mg/k$$

Έτσι, όταν το νήμα κόβεται, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινώντας από ακραία θέση, με πλάτος: $A_1 = y_0 - y_1 = 2mg/k$.

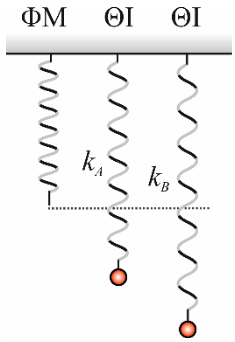
Μετά τη δημιουργία συσσωματώματος, στην τελική θέση ισορροπίας ταλάντωσης Δ ισχύει:

$$2mg = ky_2 \Rightarrow y_2 = 2mg/k$$

Εφόσον το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία στη θέση Γ, αυτή θα είναι η ακραία θέση της ταλάντωσής του. Έτσι, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι τώρα: $A_2 = y_2 - y_1 = mg/k$. Ο λόγος A_1/A_2 ισούται με:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2mg/k}{mg/k} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 2$$

17. Τα ελατήρια των δύο ταλαντωτών Α και Β του σχήματος έχουν ίδιο φυσικό μήκος και σταθερές που συνδέονται με τη σχέση $k_A = 2k_B$. Τα σώματα που κρέμονται από τα ελατήρια είναι ίδια. Φέρνουμε τα σώματα στη θέση που τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος και τα αφήνουμε ελεύθερα να εκτελέσουν κατακόρυφη ταλάντωση. Λόγω των τριβών, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα τα σώματα θα σταματήσουν να ταλαντώνονται. Αν η θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον λόγω των αποσβέσεων του σώματος Α είναι 2 J η θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον λόγω των αποσβέσεων του σώματος Β είναι:



α. 1 J
β. 2 J
γ. 4 J

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το γ.

Αιτιολόγηση

Και στις δύο περιπτώσεις το πλάτος ταλάντωσης είναι η κατακόρυφη απόσταση από το φυσικό μήκος μέχρι τη θέση ισορροπίας. Στις θέσεις ισορροπίας των σωμάτων ισχύουν:

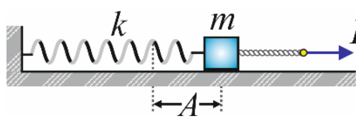
$$\left.\begin{aligned} mg &= k_A A_A \\ mg &= k_B A_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_A A_A = k_B A_B \Rightarrow 2k_B A_A = k_B A_B \Rightarrow A_B = 2A_A$$

Η εκλυόμενη θερμότητα ισούται με την αρχική ενέργεια ταλάντωσης:

$$Q_A = \frac{1}{2}k_A A_A^2 = 2\ \mathrm{J}$$

$$Q_B = \frac{1}{2}k_B A_B^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{k_A}{2}\cdot 4A_A^2 = 2\cdot\frac{1}{2}k_A A_A^2 = 2Q_A \Rightarrow Q_B = 4\ \mathrm{J}$$

18. Στο οριζόντιο ελατήριο του σχήματος, σταθεράς $k = 200\ \mathrm{N/m}$, έχουμε δέσει στο ελεύθερο άκρο του σώμα Σ μάζας $m = 2\ \mathrm{kg}$. Απομακρύνουμε το σώμα κατά $A = 0{,}3\ \mathrm{m}$ από τη θέση ισορροπίας και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ταλάντωση. Στο σώμα εκτός της δύναμης επαναφοράς δρα και δύναμη αντίστασης της μορφής $F_R = -bv$. Κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_1 το σώμα περνά από την θέση $x = 0$ έχοντας ταχύτητα $v = 2\ \mathrm{m/s}$. Το έργο της δύναμης αντίστασης στο χρονικό διάστημα 0 έως t_1 είναι ίσο με:



α. -4 J
β. -5 J
γ. -9 J

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση

Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_0 = \frac{1}{2}kA^2 = 9\text{ J}$$

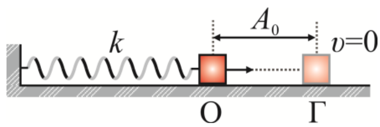
Τη χρονική στιγμή t_1 η ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 4\text{ J}$$

Το έργο της δύναμης αντίστασης είναι ίσο με τη μείωση της ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος:

$$W = E_1 - E_0 \Rightarrow W = -5\text{ J}$$

19. Στο οριζόντιο ελατήριο του σχήματος, σταθεράς $k = 100\text{ N/m}$, έχουμε δέσει στο ελεύθερο άκρο του σώμα Σ μάζας $m = 1\text{ kg}$. Απομακρύνουμε το σώμα κατά $A_0 = 0{,}4\text{ m}$ από τη θέση ισορροπίας και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ταλάντωση. Στο σώμα εκτός της δύναμης επαναφοράς δρα και δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -12\upsilon$ (SI). Κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_1 το σώμα περνά από τη θέση x_1 έχοντας ταχύτητα $\upsilon_1 = 2\text{ m/s}$ και επιτάχυνση $a_1 = 6\text{ m/s}^2$. Το έργο της δύναμης αντίστασης στο χρονικό διάστημα από 0 έως t_1 είναι ίσο με:



α. -6 J
β. $-1{,}5\text{ J}$
γ. $-2{,}5\text{ J}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση

Το έργο της δύναμης αντίστασης ισούται με τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτή.

$$E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}100 \cdot \frac{16}{100} = 8\text{ J} \quad (1)$$

$$E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \quad (2)$$

Την απομάκρυνση x_1 τη βρίσκουμε εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow -kx - 12\upsilon = ma \Rightarrow$$

$$-kx_1 - 12\upsilon_1 = ma_1 \Rightarrow x_1 = \frac{ma_1 + 12\upsilon_1}{k} = 0{,}3\text{ m} \quad (3)$$

Από την (2) βρίσκουμε:

$$E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = 6{,}5\text{ J} \quad (2')$$

$$W_{F'} = E_1 - E_0 \Rightarrow W_{F'} = -1{,}5\text{ J}$$

20. Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά A_0 και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σώμα κάνει φθίνουσα ταλάντωση με μικρό b. Μετά από δύο πλήρεις ταλαντώσεις η επιτάχυνση του σώματος έχει γίνει ίση με το $1/4$ της αρχικής της τιμής. Οι απώλειες ενέργειας $|\Delta E_1|$ και $|\Delta E_2|$ στη διάρκεια της πρώτης και της δεύτερης περιόδου, αντίστοιχα, έχουν λόγο:

α. 1
β. 2
γ. 4

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το γ.

Αιτιολόγηση

Την επιτάχυνση σώματος που κάνει φθίνουσα ταλάντωση τη βρίσκουμε με θεμελιώδη νόμο:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} = ma \Rightarrow -Dx - b\upsilon = ma \Rightarrow a = -\frac{D}{m}x - \frac{b}{m}\upsilon$$

Στις ακραίες θέσεις είναι $\upsilon = 0$ και $x = A$, οπότε η επιτάχυνση γράφεται:

$$a = -\frac{D}{m}x \Rightarrow a = -\omega^2 x$$

Για $t_0 = 0$ είναι $a_0 = -\,\omega^2 A_0$ και για $t = 2T$ είναι $a = -\,\omega^2 A_2$.

Δίνεται:

$$a = \frac{1}{4}a_0 \Rightarrow -\,\omega^2 A_2 = -\frac{1}{4}\omega^2 A_0 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{4}\,A_0$$

Ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1^2 = A_0 A_2 \Rightarrow A_1^2 = A_0\frac{A_0}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{A_0}{2}$$

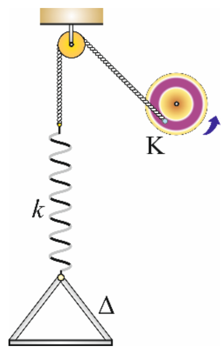
Επομένως:

$$|\Delta E_1| = \frac{1}{2}DA_0^2 - \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{2}DA_0^2 - \frac{1}{2}D\frac{A_0^2}{4} = \frac{1}{2}DA_0^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}DA_0^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$|\Delta E_2| = \frac{1}{2}DA_1^2 - \frac{1}{2}DA_2^2 = \frac{1}{2}D\frac{A_0^2}{4} - \frac{1}{2}D\frac{A_0^2}{16} = \frac{1}{2}DA_0^2\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}DA_0^2\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

$\frac{|\Delta E_1|}{|\Delta E_2|} = 4$

21. Στο διπλανό σχήμα δείχνεται μια διάταξη δημιουργίας εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Το ελατήριο έχει σταθερά $k = 200$ N/m και η μάζα του δίσκου Δ είναι $M = 1{,}2$ kg. Στο δίσκο, εκτός της δύναμης επαναφοράς, δρα μία δύναμη αντίστασης της μορφής $F_R = -b\upsilon$ και από το διεγέρτη μια περιοδική δύναμη που περιγράφεται από τη σχέση $F = F_{max}\sigma\upsilon\nu 10t$ (SI). Θεωρήστε ότι το b είναι πολύ μικρό. Για να μεταφέρεται η ενέργεια από το δίσκο στο ταλαντούμενο σύστημα με το βέλτιστο τρόπο πρέπει στο δίσκο να προστεθεί μάζα ίση με:



α. $m_1 = 0{,}8$ kg

β. $m_2 = 1{,}2\ \text{kg}$
γ. $m_3 = 2\ \text{kg}$
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **α**.

Αιτιολόγηση

Για να μεταφέρεται η ενέργεια από το δίσκο στο ταλαντούμενο σύστημα με το βέλτιστο τρόπο πρέπει το σύστημα να βρεθεί σε συντονισμό. Άρα:

$$f = f_0 \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+M}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m+M} \Rightarrow m + M = \frac{k}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{k}{\omega^2} - M \Rightarrow m = 0{,}8\ \text{kg}$$

22. Ένα σώμα μάζας m είναι προσδεμένο σε ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f = f_0$, όπου f_0 η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Αντικαθιστούμε το σώμα με άλλο εννιαπλάσιας μάζας και διατηρούμε τη συχνότητα του διεγέρτη σταθερή. Η παραπάνω μεταβολή προκαλεί:

α. τριπλασιασμό της ιδιοσυχνότητας και αύξηση του πλάτους ταλάντωσης του συστήματος.
β. υποτριπλασιασμό της ιδιοσυχνότητας και μείωση του πλάτους ταλάντωσης του συστήματος.
γ. υποτριπλασιασμό της συχνότητας ταλάντωσης του συστήματος.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι:

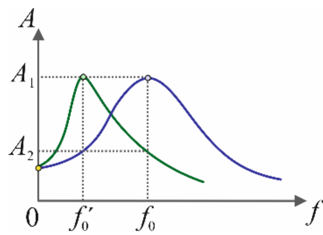
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Με τον εννιαπλασιασμό της μάζας η ιδιοσυχνότητα γίνεται:

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{9m}} = \frac{1}{3}f_0$$

Αρχικά, ήταν $f = f_0$ οπότε είχαμε συντονισμό.

Με την αλλαγή της ιδιοσυχνότητας, η f δεν είναι πια ίση με την ιδιοσυχνότητα, ο συντονισμός παύει και έτσι το πλάτος ταλάντωσης ελαττώνεται, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα του σχήματος.



23. Ένα σώμα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση και η απομάκρυνση του σώματος σε συνάρτηση με τοχρόνο μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση $x = 0{,}3\eta\mu 10\pi t$ (SI). Αν η συχνότητα του διεγέρτη αυξηθεί κατά 5 Hz, η μέγιστη ταχύτητα διπλασιάζεται σε σχέση με την αρχική. Για τη συχνότητα συντονισμού f_0 ισχύει:

α. $f_0 = 5$ Hz
β. 5 Hz $< f_0 <$ 10 Hz
γ. $f_0 >$ 10 Hz

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση

Από την εξίσωση της ταλάντωσης προκύπτει ότι $\omega = 10\pi$ rad/s, οπότε η αρχική συχνότητα είναι $f_1 = \omega/2\pi = 5$ Hz. Με την αύξηση της συχνότητας κατά 5 Hz, η συχνότητα θα γίνει $f_2 = 10$ Hz $= 2f_1$. Η αρχική μέγιστη ταχύτητα είναι:

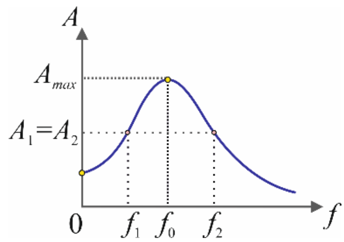
$$\upsilon_{max} = \omega A = 2\pi f_1 A_1 \quad (1)$$

Με την αύξηση της συχνότητας η μέγιστη ταχύτητα θα διπλασιαστεί:

$$\upsilon'_{max} = 2\pi f_2 A_2 \Rightarrow 2\upsilon_{max} = 2\pi 2 f_1 A_2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_{max} = 2\pi f_1 A_2 \ (2)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι $A_1 = A_1$. Όπως φαίνεται από την καμπύλη συντονισμού του σχήματος, θα πρέπει 5 Hz $< f_0 <$ 10 Hz.



24. Σε μία εξαναγκασμένη ταλάντωση η απομάκρυνση δίνεται από τη σχέση $x = 0{,}2\eta\mu 20\pi t$ (SI). Αν η συχνότητα πάρει την τιμή $f_2 = 14$ Hz, η μέγιστη ταχύτητα παίρνει την τιμή $\upsilon_{max} = 5{,}6\pi$ m/s.

Α. Για τη συχνότητα συντονισμού ισχύει:

α. $f_0 <$ 10 Hz
β. 10 Hz $< f_0 <$ 14 Hz
γ. $f_0 >$ 14 Hz

Β. Για τη συχνότητα $f_1 = 10$ Hz ισχύει:

α. $K_{max}/U_{max} < 1$
β. $K_{max}/U_{max} = 1$
γ. $K_{max}/U_{max} > 1$

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις και να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.

ΛΥΣΗ

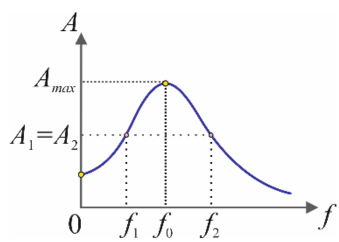
Α. Σωστό είναι το **β**.

Αιτιολόγηση

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης βρίσκουμε τη συχνότητα f_1 της ταλάντωσης:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow 20\pi = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = 10 \text{ Hz}$$

Θα υπολογίσουμε το πλάτος της ταλάντωσης όταν η συχνότητα είναι $f_2 = 14$ Hz.



$$\upsilon_{max} = 2\pi f_2 A \Rightarrow 5{,}6\pi = 2\pi \cdot 14 \cdot A_2 \Rightarrow A_2 = 0{,}2 \text{ m}$$

Παρατηρούμε ότι $A_2 = A_1 = 0{,}2$ m.
Αν κάνουμε την καμπύλη που δείχνει πώς μεταβάλλεται το πλάτος με τη συχνότητα παρατηρούμε ότι: $f_1 < f_0 < f_2 \Rightarrow 10 \text{ Hz} < f_0 < 14 \text{ Hz}$.

Β. Σωστό είναι το **α**.

Αιτιολόγηση

$$\frac{K_{max}}{U_{max}} = \frac{\frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2}{\frac{1}{2} D A^2} = \frac{m\omega_1^2 A^2}{m\omega_0^2 A^2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi f_1}{2\pi f_0}\right)^2 = \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2 \Rightarrow \frac{K_{max}}{U_{max}} < 1$$

25. Σε κάθε εξαναγκασμένη ταλάντωση είναι:

α. $E_{\pi\rho(T)} = Q_{(T)}$

β. $\frac{dE_{\pi\rho}}{dt} = \frac{dQ}{dt}$

γ. $D = m\omega^2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.
Όταν ισχύει το β αποδείξτε ότι έχουμε συντονισμό.

ΛΥΣΗ

Σωστό είναι το **α**.

Αιτιολόγηση

Προκύπτει άμεσα από τη διατήρηση της ενέργειας.
Θα αποδείξουμε ότι το β ισχύει μόνον όταν έχουμε συντονισμό.
Στο σώμα ασκούνται τρεις δυνάμεις:

- Η εξωτερική περιοδική δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$.
- Η δύναμη αντίστασης $F' = -b\upsilon$.
- Η δύναμη επαναφοράς $F_{\varepsilon\pi} = -Dx$.

Θεμελιώδης νόμος:

$$F_{\varepsilon\xi} + F' + F_{\varepsilon\pi} = ma \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} + F' - Dx = -m\omega^2 x \Rightarrow$$

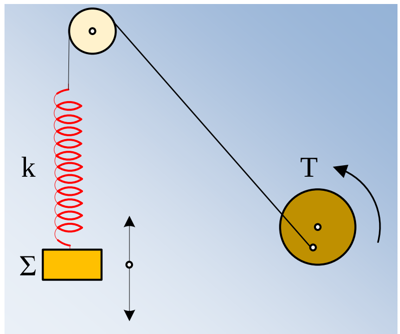
$$F_{\varepsilon\xi} + F' - m\omega_0^2 x = -m\omega^2 x$$

Αν έχουμε συντονισμό ($\omega = \omega_0$):

$$F_{\varepsilon\xi} + F' = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = -F' \Rightarrow dW_{\varepsilon\xi} = -dW_{F'}$$

$$\frac{dW_{\varepsilon\xi}}{dt} = -\frac{dW_{F'}}{dt} \Rightarrow \frac{dE_{\pi\rho}}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

26. Το σώμα Σ δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, μπορεί να εκτελεί, απουσία αποσβέσεων, ΑΑΤ με συχνότητα 0,5Hz. Στη διάταξη του διπλανού σχήματος, παρουσία αποσβέσεων, το σώμα μπορεί να εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση ορισμένου πλάτους A_1, όταν ο τροχός Τ στρέφεται με περίοδο T_1=1s. Αν αυξήσουμε την περίοδο περιστροφής του τροχού στην τιμή T_2=1,25s, τότε:



i) Το πλάτος ταλάντωσης:

α) θα μειωθεί, β) θα μείνει το ίδιο, γ) θα αυξηθεί.

ii) Αν το πλάτος ταλάντωσης είναι A_2 , τότε:

Α) Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος θα είναι:

α) $2\pi f_2 \cdot A_2$ β) $2\pi f_0 \cdot A_2$ γ) άλλη τιμή.

Β) Για τις μέγιστες τιμές Δυναμικής και Κινητικής ενέργειας θα ισχύει:

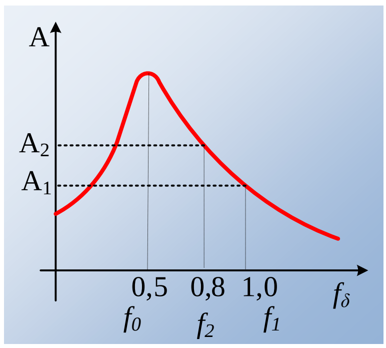
α) $K_{max} > U_{max}$, β) $K_{max} = U_{max}$, γ) $K_{max} < U_{max}$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

Η συχνότητα 0,5Hz της ελεύθερης και αμείωτης ταλάντωσης την ονομάζουμε ιδιοσυχνότητα (f_0=0,5Hz). Στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, το σώμα ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη, στην περίπτωσή μας, τη συχνότητα περιστροφής του τροχού, όπου $f_1 = 1/T_1$=1Hz και $f_2 = 1/T_2$=0,8Hz.

i) Παίρνουμε την καμπύλη συντονισμού, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου έχουμε σημειώσει τις παραπάνω συχνότητες, οι οποίες μας ενδιαφέρουν. Αλλά με βάση το σχήμα, όταν αυξάνουμε την περίοδο από την τιμή T_1 στην τιμή T_2, μειώνουμε τη συχνότητα, πλησιάζοντας προς την κατάσταση συντονισμού, από τις μεγαλύτερες συχνότητες. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος αυξάνεται, δηλαδή $A_2 > A_1$. Σωστό το γ).



ii) Το σώμα ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη f_2 και με πλάτος A_2.

Α) Έτσι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_{max} = A\omega_\delta = A_2 \cdot 2\pi f_2$$

Σωστό το α).

Β) Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του σώματος είναι ίση:

$$U_{max} = \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2 A_2^2 \quad (1)$$

Ενώ η μέγιστη κινητική ενέργεια:

$$K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_2^2 A_2^2 \quad (2)$$

Αλλά με βάση τις τιμές που έχουμε:

$$f_2 > f_0 \;\Rightarrow\; \omega_2 > \omega_o \xrightarrow{(1),(2)} K_{max} > U_{max}$$

Σωστό το α).