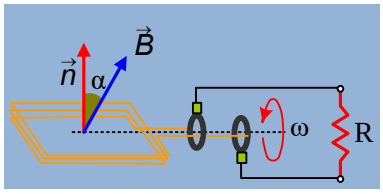
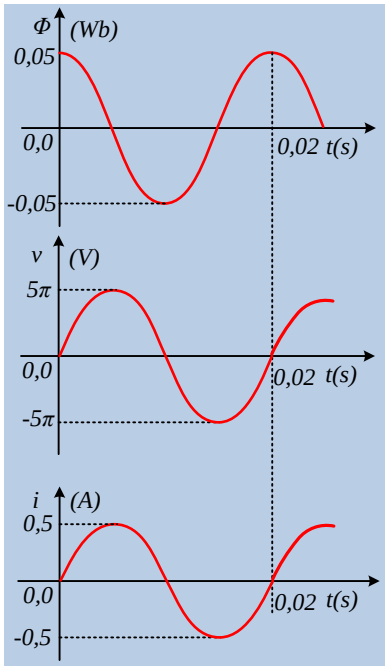
1)Το πλαίσιο του σχήματος αποτελείται από N=100 σπείρες όπου η καθεμιά έχει εμβαδόν A=50cm^2 και βρίσκεται μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B=0,1T. Να βρεθούν οι εξισώσεις της μαγνητικής ροής, της τάσης και της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη με αντίσταση R=10π Ω, σε συνάρτηση με το χρόνο, αν το πλαίσιο στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=100π rad/s, ενώ τη στιγμή t_0=0, η κάθετη στο πλαίσιο σχηματίζει με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου γωνία α, όπου:



i) α=0°, ii) α=90°, iii) α=30°.

Θεωρούμε ότι στο κύκλωμα δεν εμφανίζεται άλλη αντίσταση πέρα από αυτή του αντιστάτη.

Απάντηση:



i) Αν τη στιγμή t=0 το πλαίσιο είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ή ισοδύναμα η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στο πλαίσιο με την ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι α=0, τότε η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο δίνεται από την εξίσωση:

$$\Phi=N\cdot B\cdot A\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t+\alpha) = N\cdot B\cdot A\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) \rightarrow$$

$$\Phi=100\cdot 0,1\cdot 50\cdot 10^{-4}\cdot \sigma\upsilon(100\pi t)=0,05\cdot \sigma\upsilon\nu(100\pi t) \quad (S.I.)\ (1)$$

Η αντίστοιχη σχέση για την στιγμιαία ΗΕΔ από επαγωγή, την οποία ονομάζουμε εναλλασσόμενη τάση, δίνεται από την εξίσωση:

$$v = -\frac{d\Phi}{dt} = N\cdot\omega\cdot B\cdot A\cdot \eta\mu(100\pi t) \rightarrow$$

$$v=100\cdot 100\pi\cdot 0,1\cdot 50\cdot 10^{-4}\cdot \eta\mu(100\pi t)=5\pi\cdot \eta\mu(100\pi t) \quad (S.I.)\ (2)$$

Αλλά τότε από το νόμο του Ohm παίρνουμε:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{5\pi}{10\pi}\eta\mu(100\pi t) = 0,5\cdot \eta\mu(100\pi t) \quad (S.I.) \quad (3)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (1), (2) και (3), στο διπλανό σχήμα.

ii) Αν τη στιγμή t=0 το πλαίσιο σχηματίζει γωνία α=90° με την ένταση του μαγνητικού πεδίου (είναι παράλληλο στις δυναμικές γραμμές), τότε η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο δίνεται από την εξίσωση:

$$\Phi=N\cdot B\cdot A\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t+\alpha) = N\cdot B\cdot A\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t+\pi/2) \rightarrow$$

$$\Phi=-N\cdot B\cdot A\cdot \eta\mu(\omega t) \quad ή$$

$$\Phi=-0,05\cdot \eta\mu(100\pi t) \quad (S.I.)\ (1\alpha)$$

Η αντίστοιχη τιμή για την στιγμιαία εναλλασσόμενη τάση, δίνεται από την εξίσωση:

$$v = -\frac{d\Phi}{dt} = N\cdot\omega\cdot B\cdot A\cdot \eta\mu(100\pi t+\pi/2) \rightarrow$$

$$v = N\cdot\omega\cdot B\cdot A\cdot \sigma\upsilon\nu(100\pi t) \rightarrow$$

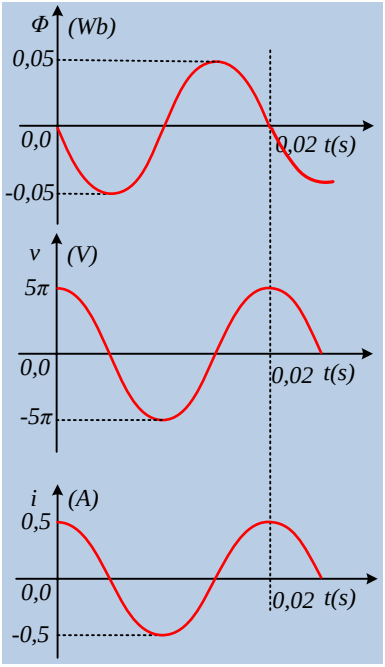
$$v=100\cdot 100\pi\cdot 0,1\cdot 50\cdot 10^{-4}\cdot \sigma\upsilon\nu(100\pi t)\rightarrow$$

$$v=5\pi\cdot \sigma\upsilon\nu(100\pi t) \quad (S.I.)\ (2\alpha)$$

Αλλά τότε από το νόμο του Ohm παίρνουμε:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{5\pi}{10\pi}\sigma\upsilon\nu(100\pi t) \rightarrow$$

$$i = 0{,}5 \cdot \sigma\upsilon\nu(100\pi t)\ \ (S.I.)\ (3\alpha)$$



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (1α, (2α) και (3α), στο διπλανό σχήμα.

iii) Τέλος αν τη στιγμή t=0 η κάθετος στο πλαίσιο σχηματίζει με την ένταση του μαγνητικού πεδίου γωνία α=30°, τότε η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο δίνεται από την εξίσωση:

$$\Phi = N \cdot B \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \alpha) = N \cdot B \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \pi/6) \rightarrow$$

$$\Phi = 100 \cdot 0{,}1 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot \sigma\upsilon(100\pi t + \pi/6)$$

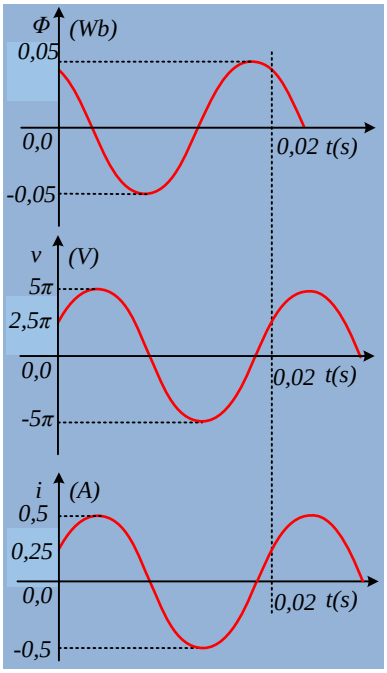
$$\Phi = 0{,}05 \cdot \sigma\upsilon\nu(100\pi t + \pi/6)\ \ (S.I.)\ (1\beta)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για την εναλλασσόμενη τάση, δίνεται από την εξίσωση:

$$v = -\frac{d\Phi}{dt} = N \cdot \omega \cdot B \cdot A \cdot \eta\mu(100\pi t + \pi/6) \rightarrow$$

$$v = 100 \cdot 100\pi \cdot 0{,}1 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot \eta\mu(100\pi t + \pi/6) \rightarrow$$

$$v = 5\pi \cdot \eta\mu(100\pi t + \pi/6)\ \ (S.I.)\ (2\beta)$$



Αλλά τότε από το νόμο του Ohm παίρνουμε:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{5\pi}{10\pi}\eta\mu(100\pi t + \pi/6) = 0{,}5 \cdot \eta\mu(100\pi t + \pi/6)\ \ (S.I.)\quad (3\beta)$$

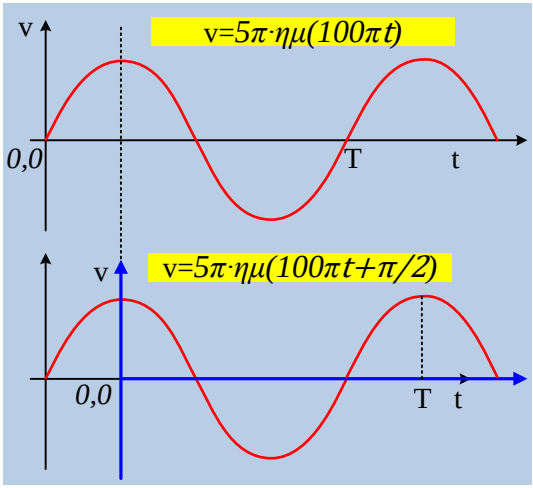
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων (1β), (2β) και (3β), στο διπλανό σχήμα.

Σχόλια

1. Στις παραπάνω αρμονικές συναρτήσεις το όρισμα ημιτόνου ή συνημίτονου ονομάζεται φάση του μεγέθους. Έτσι αναφερόμενοι στην εξίσωση (2β):

$$v = 5\pi \cdot \eta\mu(100\pi t + \pi/6)$$

Η ποσότητα φ=100πt + π/6 ονομάζεται φάση της εναλλασσόμενης τάσης, ενώ το π/6 ονομάζεται αρχική φάση της τάσης.



2. Τι διαφορά έχει η γραφική παράσταση μιας αρμονικής συνάρτησης της μορφής:

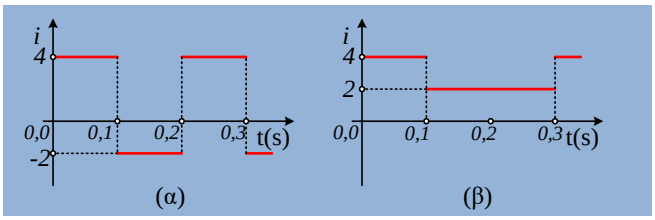
$$v = 5\pi \cdot \eta\mu(100\pi t)$$

από την αντίστοιχη της συνάρτησης

$$v = 5\pi \cdot \eta\mu(100\pi t + \pi/2);$$

Η διαφορά φάσης αντιστοιχεί σε μετατόπιση προς τα δεξιά της αρχής των αξόνων κατά Δt= ¼ T, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (Στα μαθηματικά συνήθως λέμε ότι η καμπύλη μεταφέρεται προς τα αριστερά κατά ¼ T, πράγμα που είναι ισοδύναμο…)

2)Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των εντάσεων σε συνάρτηση με το χρόνο, για δυο ρεύματα τα οποία διαρρέουν έναν αντιστάτη.



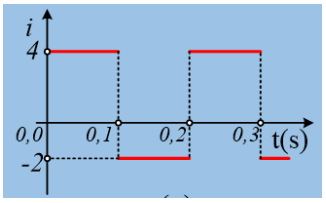
i) Ποια ρεύματα θα χαρακτηρίζατε ως συνεχή και ποια ως εναλλασσόμενα;

ii) Να υπολογιστή η ενεργός ένταση κάθε ρεύματος.

Απάντηση:

iv) Ένα ρεύμα ονομάζεται εναλλασσόμενο, όταν αλλάζει η φορά της έντασης. Από τα παραπάνω ρεύματα, μόνο το (α) θεωρείται εναλλασσόμενο, αφού μόνο σε αυτό η φορά της έντασης αλλάζει.

v) Για το ρεύμα του (α) σχήματος, με βάση το διάγραμμα η περίοδος είναι ίση με T=0,2s.



α) Η θερμότητα που παράγεται πάνω σε έναν αντιστάτη, σε χρόνο μιας περιόδου, θα είναι ίση:

$$Q_T=I_1^2R\cdot t_1+I_2^2R\cdot t_2=4^2R\cdot 0,1+2^2R\cdot 0,1=2R \text{ (S.I.) (1)}$$

Αν $I_{εν}$ η ενεργός ένταση του ρεύματος αυτού, τότε σε μια περίοδο θα έχουμε θερμότητα:

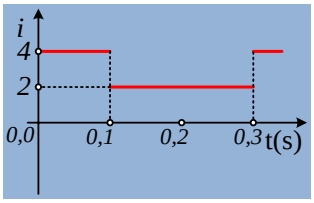
$$Q_T = I_{εν}^2RT = I_{εν}^2R\cdot 0,2 \quad (S.I.) \text{ (2)}$$

Από (1) και (2) παίρνουμε:

$$I_{εν}^2R\cdot 0,2 = 2R \rightarrow$$

$$i_{εν} = \sqrt{10}\ A$$

β) Το ρεύμα του (β) σχήματος, είναι μεν συνεχές αλλά μεταβλητής έντασης με περίοδο $T_β$=0,3s, με βάση το σχήμα. Δουλεύοντας με την ίδια λογική, όπως παραπάνω, παίρνουμε:



$$Q_T=I_1^2R\cdot t_1+I_2^2R\cdot t_2=4^2R\cdot 0,1+2^2R\cdot 0,2=2,4R \text{ (S.I.) (3)}$$

Αν $I_{εν}$ η ενεργός ένταση του ρεύματος αυτού, τότε σε μια περίοδο θα έχουμε θερμότητα:

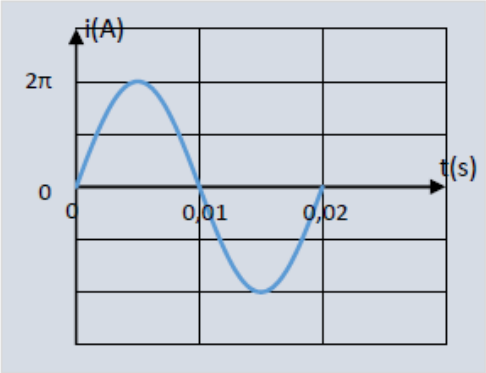
$$Q_T = I_{εν}^2RT = I_{εν}^2R\cdot 0,3 \text{ (S.I.) (4)}$$

Από (3) και (4) παίρνουμε:

$$I_{εν}^2R\cdot 0,3 = 2,4R \rightarrow$$

$$I_{εν,β} = \sqrt{8}\ A = 2\sqrt{2}\ A$$

3) Το πλαίσιο μιας γεννήτριας στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου με τον άξονα περιστροφής του να είναι κάθετος στο μαγνητικό πεδίο. Η γεννήτρια αυτή τροφοδοτεί αντιστάτη. Το εναλλασσόμενο ρεύμα που διαρρέει το παραπάνω κύκλωμα γεννήτριας - αντιστάτη δίνεται στο παραπλεύρως διάγραμμα έντασης ρεύματος – χρόνου.



Υπολογίστε το φορτίο το διερχόμενο από μια διατομή του κυκλώματος κατά το χρονικό διάστημα 0 έως 0,01 s.

Απάντηση

Για να έχουμε το αποτέλεσμα του διαγράμματος που μας δίνεται θα πρέπει τη χρονική στιγμή μηδέν η κάθετος στο πλαίσιο να σχηματίζει μηδενική γωνία με το πεδίο, οπότε η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο είναι

$$\Phi = BA\sigma\upsilon\nu\omega t \qquad (1)$$

Η δημιουργούμενη ΗΕΔ από επαγωγή είναι

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} = NBA\omega\eta\mu\omega t$$

Το επαγωγικό ρεύμα είναι

$$i = \frac{\mathcal{E}_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}}$$

$$i = \frac{NBA\omega}{R_{o\lambda}}\eta\mu\omega t \qquad (2)$$

Η τελευταία σχέση είναι η συνάρτηση του ρεύματος ως προς το χρόνο της οποίας η γραφική παράσταση μας δίνεται.

Λαμβάνοντας υπόψη την (2) και το δοθέν διάγραμμα έχουμε

$$\frac{NBA\omega}{R_{o\lambda}} = 2\pi\ A \qquad (3)$$

και

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 100\pi\ \frac{rad}{s} \qquad (4)$$

Από (3), (4)

$$\frac{NBA}{R_{o\lambda}} = 0{,}02\ C \qquad (5)$$

Εξ άλλου σύμφωνα με το νόμο του Neumann

$$Q = -N\frac{\Delta\Phi}{R_{o\lambda}}$$

Η παραπάνω σχέση με τη βοήθεια της (1) δίνει

$$Q = -NBA\frac{\Delta(\sigma\upsilon\nu\omega t\ )}{R_{o\lambda}}$$

Συνεπώς για το χρονικό διάστημα που μας δίνεται και δεδομένης της τιμής της ω που έχουμε προσδιορίσει

$$Q = NBA\frac{\sigma\upsilon\nu 0 - \sigma\upsilon\nu\pi}{R_{o\lambda}}$$

$$Q = 2\frac{NBA}{R_{o\lambda}}$$

και λαμβάνοντας υπόψη την (5)

$$Q = 0{,}04\ C$$

4) Όταν αντιστάτης αντίστασης R διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα $i_1 = I_1 \eta\mu\omega t$, σε χρονικό διάστημα Δt ελευθερώνεται στο περιβάλλον ενέργεια υπό μορφή θερμότητας ίση με 90J. Όταν ο ίδιος αντιστάτης R διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα $i_2 = I_2 \eta\mu\omega t$, ελευθερώνεται στο περιβάλλον, στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt, ενέργεια υπό μορφή θερμότητας ίση με 40J. Ποιο το ποσό ενέργειας που ελευθερώνεται στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας, όταν διαβιβάσουμε ταυτόχρονα στον ίδιο αντιστάτης αντίστασης R, τα δύο παραπάνω ρεύματα έτσι, ώστε να βρίσκονται σε φάση

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Όταν ο αντιστάτης αντίστασης R διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα $i_1 = I_1 \eta\mu\omega t$, η ενέργεια υπό μορφή θερμότητας που ελευθερώνεται στο περιβάλλον , σε χρονικό διάστημα Δt, εκφράζεται με τη σχέση: $Q_{\Theta(1)} = I_{\varepsilon\nu(1)}^2 R\Delta t = \frac{I_1^2}{2}R\Delta t \Rightarrow I_1^2 = \frac{2Q_{\Theta(1)}}{R\Delta t} \Rightarrow I_1 = \sqrt{\frac{2Q_{\Theta(1)}}{R\Delta t}}$ (1)

Όταν ο αντιστάτης αντίστασης R διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα $i_2 = I_2 \eta\mu\omega t$, η ενέργεια υπό μορφή θερμότητας που ελευθερώνεται στο περιβάλλον , σε χρονικό διάστημα Δt, εκφράζεται με τη σχέση: $Q_{\Theta(2)} = I_{\varepsilon\nu(2)}^2 R\Delta t = \frac{I_2^2}{2}R\Delta t \Rightarrow I_2^2 = \frac{2Q_{\Theta(2)}}{R\Delta t} \Rightarrow I_2 = \sqrt{\frac{2Q_{\Theta(2)}}{R\Delta t}}$ (2)

Όταν διαβιβάσουμε ταυτόχρονα στον αντιστάτης αντίστασης R, τα δύο παραπάνω ρεύματα έτσι, ώστε να βρίσκονται σε φάση, η ένταση **του ρεύματος** που διαρρέει τον αντιστάτη δίνεται από την εξίσωση: $i = i_1 + i_2 = I_1 \eta\mu\omega t + I_2 \eta\mu\omega t \Rightarrow i = (I_1 + I_2)\eta\mu\omega t$ (3)

Η ενεργός ένταση του παραπάνω, ***αρμονικά εναλλασσόμενου*** ρεύματος είναι ίση με:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_1 + I_2}{\sqrt{2}}$$

Το ποσό ενέργειας που ελευθερώνεται στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας, υπολογίζεται από τη σχέση:

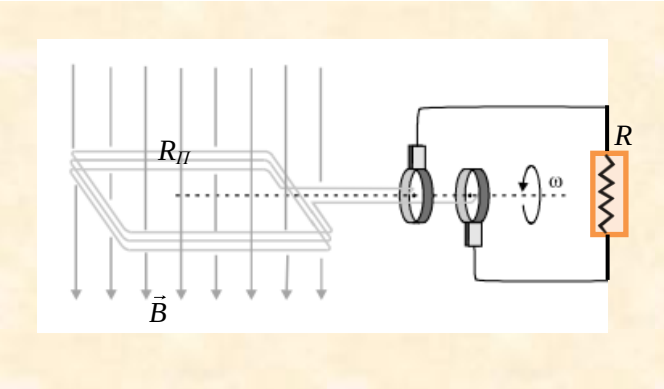
$$Q_\Theta = I_{\varepsilon\nu}^2 R\Delta t = \frac{(I_1 + I_2)^2}{2} R\Delta t \Rightarrow Q_\Theta = \frac{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2}{2} R\Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_\Theta = \frac{I_1^2}{2} R\Delta t + \frac{I_2^2}{2} R\Delta t + I_1 I_2 R\Delta t \xrightarrow[(2)]{(1)} Q_\Theta = Q_{\Theta(1)} + Q_{\Theta(2)} + \sqrt{\frac{2Q_{\Theta(1)}}{R\Delta t}} \cdot \sqrt{\frac{2Q_{\Theta(2)}}{R\Delta t}} \cdot R\Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_\Theta = Q_{\Theta(1)} + Q_{\Theta(2)} + 2\sqrt{Q_{\Theta(1)} Q_{\Theta(2)}} \Rightarrow Q_\Theta = 90J + 40J + 2\sqrt{90 \cdot 40}J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_\Theta = 90J + 40J + 2 \cdot 60J \Rightarrow Q_\Theta = 250J$$

5) Ένας αγρότης - που σπούδασε μηχανικός - θέλει να θέσει σε λειτουργία μια γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος, για να φωτίσει μια αποθήκη στο χωριό. Η μέση ισχύς που θα καταναλώνεται στο εξωτερικό κύκλωμα είναι $\bar{P}_{\varepsilon\xi} = 2200W$ και η συνολική αντίσταση των λαμπτήρων του εξωτερικού κυκλώματος $R_{\varepsilon\xi} = 22\Omega$. Η γεννήτρια περιέχει ένα τετράγωνο πλαίσιο με $N = 120$ *σπείρες*, πλευράς $\alpha = 0{,}5m$, που βρίσκεται με το επίπεδό του κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης μέτρου



$B = 0{,}2\sqrt{2}\,T$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Το σύρμα του πλαισίου παρουσιάζει αντίσταση $R_\Pi = 2\Omega$, ενώ τα καλώδια σύνδεσης που θα χρησιμοποιήσει έχουν αμελητέα αντίσταση.

α) Ποιο πρέπει να είναι το πλάτος της εναλλασσόμενης ΗΕΔ από επαγωγή, που αναπτύσσεται στο πλαίσιο αν θέλουμε να λειτουργεί κανονικά η εγκατάσταση;

β) Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του πλαισίου;

γ) Ποια είναι η χρονική στιγμή η ΗΕΔ στο πλαίσιο έχει τιμή $E = E_{max}/2$ για πρώτη φορά; Ποια είναι η αλγεβρική τιμή της μαγνητικής ροής που διέρχεται τότε από το πλαίσιο;

δ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος του κυκλώματος και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για μια περίοδο, σε βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.

ε) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της στιγμιαίας ισχύος που καταναλώνεται σε όλη τη διάταξη και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για μια περίοδο. Τι μας δίνει το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων;

Απάντηση

α) Η μέση ισχύς που θα καταναλώνεται στο εξωτερικό κύκλωμα θα είναι

$$\bar{P}_{\varepsilon\xi} = I_{\varepsilon\nu}{}^2 \cdot R_{\varepsilon\xi} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\frac{\bar{P}_{\varepsilon\xi}}{R_{\varepsilon\xi}}} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\frac{2200}{22}} = 10A$$

Η ενεργός τάση στα άκρα του πλαισίου πρέπει να είναι

$$V_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu} \cdot R_{\varepsilon\xi} \Leftrightarrow V_{\varepsilon\nu} = 10 \cdot 22 \Leftrightarrow V_{\varepsilon\nu} = 220V$$

Επειδή το πλαίσιο παρουσιάζει αντίσταση η ενεργός ΗΕΔ από επαγωγή που θα αναπτύσσεται στο πλαίσιο θα δίνεται από τη σχέση

$$V_{\varepsilon\nu} = E_{\varepsilon\nu} - I_{\varepsilon\nu} R_{\Pi} \Leftrightarrow E_{\varepsilon\nu} = V_{\varepsilon\nu} + I_{\varepsilon\nu} R_{\Pi} \Leftrightarrow E_{\varepsilon\nu} = 220 + 10 \cdot 2 \Leftrightarrow E_{\varepsilon\nu} = 240V$$

(ή $P_{ολ}=P_{εξ}+P_{Rπ} \rightarrow E_{εν} \cdot I_{εν} = P_{εξ}+I_{εν} \cdot R_{π} \rightarrow E_{εν}=240$ V)

Άρα το πλάτος θα πρέπει να είναι $E_{max} = E_{\varepsilon\nu}\sqrt{2} = 240\sqrt{2}V$

β) Το πλάτος της ΗΕΔ που παράγεται στο πλαίσιο είναι

$$E_{max} = N\omega BS \Leftrightarrow \omega = \frac{E_{max}}{NBS} \Leftrightarrow \omega = \frac{240\sqrt{2}}{120 \cdot 0{,}2\sqrt{2} \cdot 0{,}5^2}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{240}{6} \Leftrightarrow \omega = 40 rad/s$$

γ) Η εξίσωση της ΗΕΔ που αναπτύσσεται από την περιστροφή του πλαισίου είναι

$$E = E_{max}\eta\mu(\omega t) \Leftrightarrow \frac{E_{max}}{2} = E_{max}\eta\mu(40 \cdot t) \Leftrightarrow \eta\mu(40 \cdot t) = \frac{1}{2}$$

$$40 \cdot t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } 40 \cdot t = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ όπου } k = 0,1,2,...$$

Θέτουμε $k = 0$ και η πρώτη ομάδα λύσεων δίνει $40 \cdot t = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{240}s$

Από τη χρονική εξίσωση της μαγνητικής ροής από μία σπείρα έχουμε

$$\Phi = BS \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Leftrightarrow \Phi = 0{,}2\sqrt{2} \cdot 0{,}25 \cdot \sigma\upsilon\nu(40 \cdot \frac{\pi}{240})$$

$$\Leftrightarrow \Phi = 0{,}05\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \Phi = 0{,}05\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Phi = 0{,}025\sqrt{6}Wb$$

Από το πλαίσιο θα έχουμε $\Phi_{ολ} = N \cdot \Phi = 120 \cdot 0{,}025\sqrt{6} = 3\sqrt{6}Wb.$

δ) Η τάση στα άκρα του πλαισίου θα είναι

$$\upsilon = V_{max}\eta\mu(\omega t) \Leftarrow \upsilon = 220\sqrt{2} \cdot \eta\mu(40 \cdot t) \ (S.I.)$$

Από το νόμο Ohm στο εξωτερικό κύκλωμα η ένταση του ρεύματος προκύπτει

$$i = \frac{\upsilon}{R_{\varepsilon\xi}} \Leftrightarrow I = \frac{220\sqrt{2} \cdot \eta\mu(40 \cdot t)}{22} \Leftarrow i = 10\sqrt{2} \cdot \eta\mu(40 \cdot t) \ (S.I.)$$

Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}s$

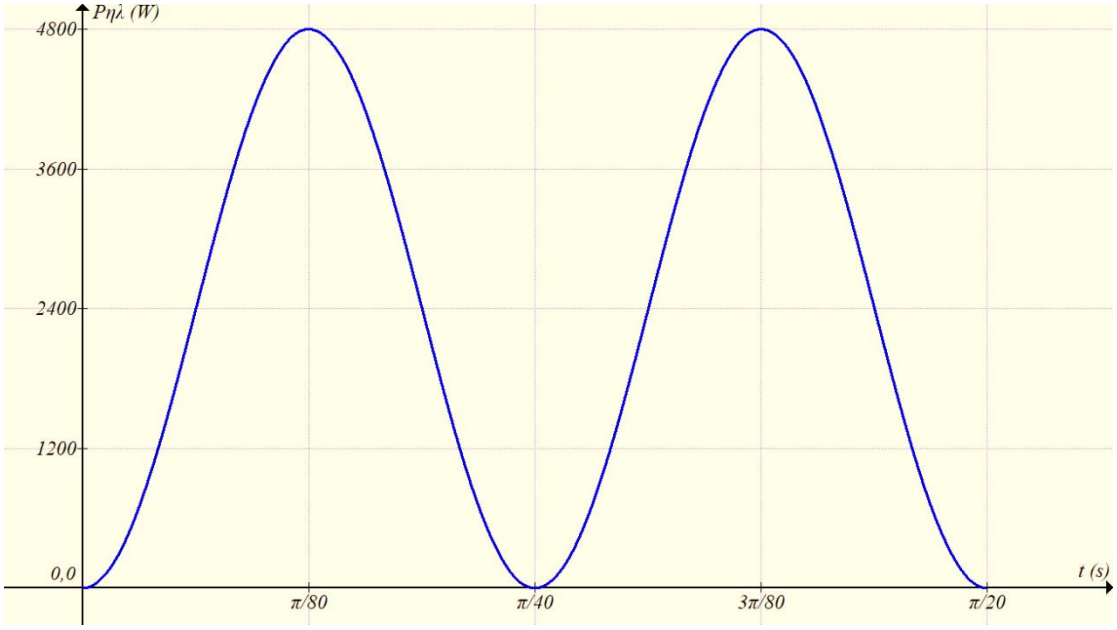
και η γραφική παράσταση είναι:

ε) Η συνολική στιγμιαία ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα θα είναι

$$P_{\eta\lambda} = E \quad \text{i} \Rightarrow P_{\eta\lambda} = 240\sqrt{2} \cdot \eta\mu(40 \cdot t) \cdot 10\sqrt{2}\eta\mu(40 \cdot t)$$

$$\Leftrightarrow P_{\eta\lambda} = 4800 \cdot \eta\mu^2(40 \cdot t) \ (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση θα είναι



Το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση μας δίνει την ηλεκτρική ενέργεια που θα προσφέρει το πλαίσιο – γεννήτρια σε χρόνο μιας περιόδου σε ολόκληρο το κύκλωμα.

Αυτή είναι $W_{\eta\lambda,T} = E_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} \cdot T = 240 \cdot 10 \cdot \frac{\pi}{20} = \frac{2400\pi}{20} = 120\pi \ J$

- Φυσικά η μόνη ενεργειακή μετατροπή είναι από ηλεκτρική σε θερμική και θεωρώντας τους λαμπτήρες σαν αντιστάτες βρίσκουμε πάλι:

  $$Q = I_{\varepsilon\nu}{}^2 R_{o\lambda} T = 10^2 \cdot 24 \cdot \frac{\pi}{20} = 120\pi \ J$$

Σχόλιο πριν την άσκηση 6)

Μην ξεχνάμε ότι σε περιοχές όπου δεν υπάρχει το δίκτυο της ΔΕΗ, όπως παραλίες, πλοία κ.λ.π. χρησιμοποιούνται γεννήτριες εναλλασσόμενου ρεύματος, με την ίδια ενεργό τάση *220V*, αφού σε αυτήν λειτουργούν όλες οι συσκευές του εμπορίου. Για την περιστροφή τους, χρησιμοποιούν δίχρονο ή τετράχρονο κινητήρα εσωτερικής καύσης. Ως καύσιμο συνήθως βάζουμε αμόλυβδη βενζίνη ή πετρέλαιο diesel και η απόδοσή τους βρίσκεται γύρω στο 10%. Αν μας φαίνεται μικρή, ας σκεφτούμε λίγο τι μάθαμε στη Θερμοδυναμική για την απόδοση μιας θερμικής μηχανής. Μόνος του, π.χ. ο βενζινοκινητήρας, έχει μια απόδοση γύρω στο 25%. Στη συνέχεια υπάρχουν απώλειες σε μια γεννήτρια, εξαιτίας μηχανικών τριβών, ηλεκτρικών αντιστάσεων, ρευμάτων Foucault, μαγνητικών υστερήσεων,…

Τι μένει;

6) Ένας ιδιοκτήτης καντίνας σε παραλία, αγόρασε μια θερμική συσκευή με στοιχεία κανονικής λειτουργίας *220V, 2200W*. Η καντίνα χρησιμοποιούσε γεννήτρια στρεφόμενου πλαισίου, εμβαδού $A = 0,5\sqrt{2}$ m^2, με $N = 100$ σπείρες και εσωτερική αντίσταση $R_{\Pi} = 2\Omega$, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 0,2T$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, που άρχισε η λειτουργία της γεννήτριας το πλαίσιο ήταν κάθετο στην ένταση του μαγνητικού πεδίου.

α) Ποια είναι η μέγιστη ένταση του ρεύματος κανονικής λειτουργίας της συσκευής και η αντίστασή της;

β) Ποια έπρεπε να είναι η μέγιστη ΗΕΔ επαγωγής του στρεφόμενου πλαισίου για να λειτουργεί κανονικά η συσκευή;

γ) Με ποια γωνιακή ταχύτητα πρέπει να στρέφεται τότε το πλαίσιο της γεννήτριας; Γράψτε τις χρονικές εξισώσεις της εναλλασσόμενης ΗΕΔ και της αντίστοιχης τάσης στα άκρα της γεννήτριας και κάνετε τις γραφικές παραστάσεις τους σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

δ) Γράψτε την εξίσωση που δίνει τη στιγμιαία ισχύ που καταναλώνει η συσκευή και κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση σε βαθμολογημένο σύστημα αξόνων για 2 περιόδους λειτουργίας.

ε) Ποιες χρονικές στιγμές στη διάρκεια μιας περιόδου η στιγμιαία ισχύς είναι $p = 3300W$;

στ) Η περιστροφή του πλαισίου της γεννήτριας γίνεται με τη βοήθεια βενζινοκινητήρα, ο οποίος έχει κατανάλωση *2,8L/h*. Αν γνωρίζουμε ότι η θερμαντική αξία της βενζίνης είναι *35MJ/L*, ποια είναι η % απόδοση της γεννήτριας;

Απάντηση

α) Στις συσκευές εναλλασσόμενου ρεύματος αναγράφεται η μέση ισχύς και η ενεργός τάση κανονικής λειτουργίας. Άρα

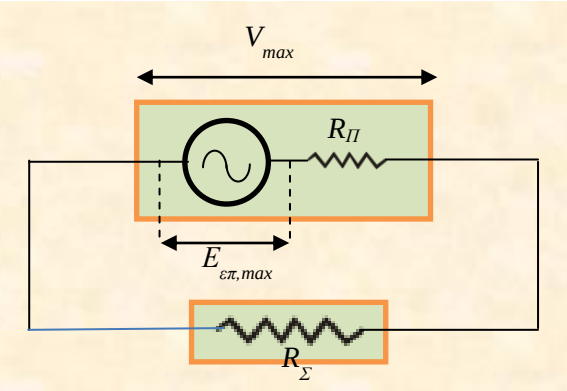
$$\bar{P} = V_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\nu} = \frac{\bar{P}}{V_{\varepsilon\nu}} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\nu} = \frac{2200}{220} \Leftrightarrow I_{\varepsilon\nu} = 10A$$

η ενεργός ένταση του ρεύματος κανονικής λειτουργίας.

Τότε: $I_{max} = I_{\varepsilon\nu}\sqrt{2} \Leftrightarrow I_{max} = 10\sqrt{2}A$

Από τον ορισμό αντίστασης

$$R_{\Sigma} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}} \Leftrightarrow R_{\Sigma} = \frac{220}{10} \Leftrightarrow R_{\Sigma} = 22\Omega$$



σχήμα 1

β) Θα μπορούσαμε σχηματικά να παραστήσουμε το κύκλωμα της γεννήτριας με τη θερμική συσκευή, όπως στο σχήμα 1. Βλέπουμε ότι η τάση στους πόλους της γεννήτριας δεν ισούται με την ΗΕΔ επαγωγής που παράγει, λόγω ύπαρξης εσωτερικής αντίστασης στο πλαίσιο.

Επειδή $V_{max} = V_{\varepsilon\nu}\sqrt{2} \Leftrightarrow V_{max} = 220\sqrt{2}V$, το πλάτος της τάσης που πρέπει να έχει η γεννήτρια στους πόλους της, θα συνδέεται με το πλάτος της ΗΕΔ που παράγει, με τη σχέση που γνωρίζουμε από το συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα

$$V_{max} = E_{max} - I_{max}R_{\Pi} \Leftrightarrow E_{max} = V_{max} + I_{max}R_{\Pi}$$
$$\Leftrightarrow E_{max} = 220\sqrt{2} + 10\sqrt{2}\cdot 2 \Leftrightarrow E_{max} = 240\sqrt{2}V$$

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα αν εφαρμόζαμε το νόμο Ohm σε κλειστό κύκλωμα:

$$E_{max} = I_{max}\cdot(R_{\Pi} + R_{\Sigma}) \Leftrightarrow E_{max} = 10\sqrt{2}\cdot 24 \Leftrightarrow E_{max} = 240\sqrt{2}V$$

γ) Η μέγιστη ΗΕΔ επαγωγής θα είναι

$$E_{max} = N\omega BA \Leftrightarrow \omega = \frac{E_{max}}{NBA} \Leftrightarrow \omega = \frac{240\sqrt{2}}{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega = \frac{240}{10} \Leftrightarrow \omega = 24rad/s$$

Τότε στα άκρα της γεννήτριας

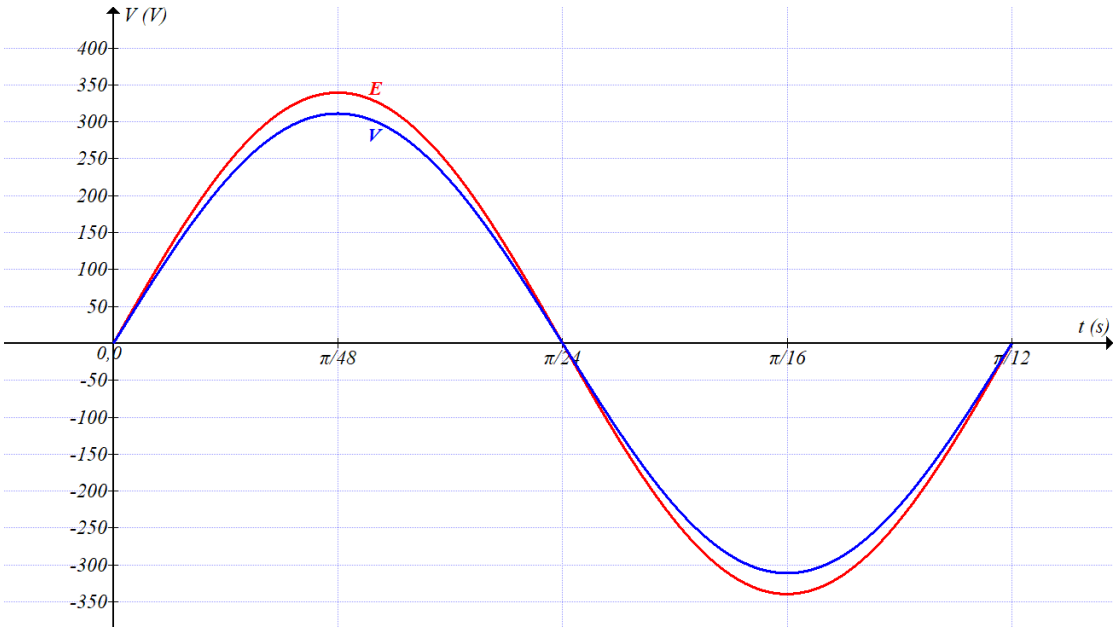
$$V = V_{max}\eta\mu(\omega t) \Leftrightarrow V = 220\sqrt{2}\cdot\eta\mu(24t)\ (S.I.)$$

ενώ η ΗΕΔ που παράγει

$$E = E_{max}\eta\mu(\omega t) \Leftrightarrow E = 240\sqrt{2}\cdot\eta\mu(24t)\ (S.I.)$$

Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}s$

Η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω, όπου φαίνεται η διαφοροποίηση της τάσης από την ΗΕΔ επαγωγής.

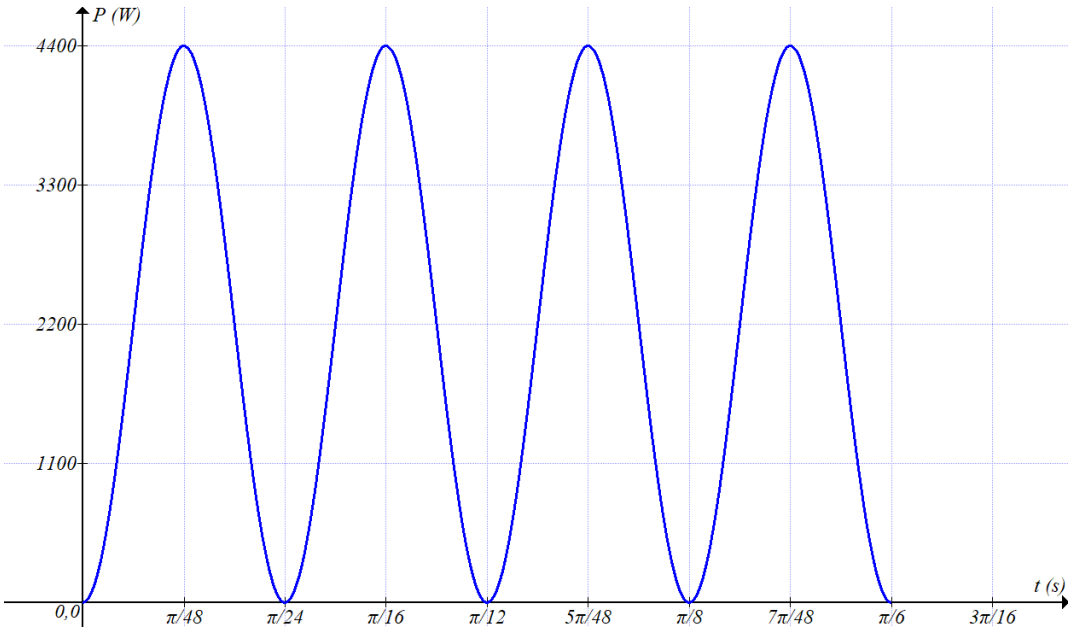


δ) Η στιγμιαία ισχύς της συσκευής είναι

$$p = \frac{\upsilon^2}{R_{\Sigma}} \Leftrightarrow p = \frac{\left[220\sqrt{2}\cdot\eta\mu(24t)\right]^2}{22} \Leftrightarrow p = 4400\cdot\eta\mu^2(24t)\,(S.I.).$$

Η περίοδος αυτής της συνάρτησης είναι $T' = T/2 = \pi/24$ s.

Η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω:



ε) Θέτουμε στην εξίσωση της στιγμιαίας ισχύος

$$p = 3300 \Leftrightarrow 4400 \cdot \eta\mu^2(24t) = 3300 \Leftrightarrow \eta\mu^2(24t) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu(24t) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η πρώτη ομάδα λύσεων δίνει

$$24t = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ή } 24t = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$t = \frac{6k\pi + \pi}{72} \text{ ή } t = \frac{6k\pi + 2\pi}{72}$$

Για $k = 0$ προκύπτουν $t = \frac{\pi}{72}s$ ή $t = \frac{2\pi}{72}s$

Η δεύτερη ομάδα λύσεων δίνει

$$24t = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \text{ ή } 24t = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{6k\pi + 4\pi}{72} \text{ ή } t = \frac{6k\pi - \pi}{72}$$

Για $k = 0$ προκύπτουν $t = \frac{4\pi}{72}s$ ή $t = -\frac{\pi}{72}s$

Για k = 1 προκύπτουν $t = \frac{10\pi}{72}s$ ή $t = \frac{5\pi}{72}s$

Σε αύξουσα σειρά οι ζητούμενες χρονικές στιγμές θα είναι

$$\frac{\pi}{72}s, \frac{2\pi}{72}s, \frac{4\pi}{72}s, \frac{5\pi}{72}s$$

στ) Σε χρόνο $t = 1h$,η γεννήτρια θα καταναλώσει $2,8L$, άρα θα πάρει από τη βενζίνη θερμική ενέργεια

$$Q = 2,8L \cdot 35 \cdot 10^6 \frac{J}{L} \Leftrightarrow Q = 98 \cdot 10^6 J$$

Η θερμάστρα θα χρειαστεί $W = I_{\varepsilon\nu}{}^2 \cdot R \cdot t \Leftrightarrow W = 100 \cdot 22 \cdot 3600 \Leftrightarrow W = 7,92 \cdot 10^6 J$

Η απόδοση της γεννήτριας θα είναι

$$n = \frac{W}{Q} \cdot 100 \Leftrightarrow n = \frac{7,92 \cdot 10^6}{98 \cdot 10^6} \cdot 100 \Leftrightarrow n \approx 8\%$$