ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

(ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ)

1)Ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση . Αν :
α. Για $t_0 = 0$ s , το σώμα m βρίσκεται στη θέση x = + A ,
β. Για $t_0 = 0$ s , το σώμα m βρίσκεται στη θέση x = – A
να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση

Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική αρμονική ταλάντωση , άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι :
$x = A \cdot ημ\,(ω \cdot t + φ_0)$.
α. Για $t_0 = 0$ s , το σώμα m βρίσκεται στη θέση x = + A :
$+ A = A \cdot ημ\,(ω \cdot 0 + φ_0) \Rightarrow$
$ημ\,φ_0 = 1 \Rightarrow$
$φ_0 = 2 \cdot κ \cdot π + (π / 2)$ ή $φ_0 = 2 \cdot κ \cdot π + π – (π / 2)$
άρα κ = 0 ,
$φ_0 = π / 2$ rad
β. Για $t_0 = 0$ s , το σώμα m βρίσκεται στη θέση x = – A :
$– A = A \cdot ημ\,(ω \cdot 0 + φ_0) \Rightarrow$
$ημ\,φ_0 = – 1 \Rightarrow$
$ημ\,φ_0 = ημ\,(3π / 2)$
$φ_0 = 2 \cdot κ \cdot π + (3 \cdot π / 2)$ ή $φ_0 = 2 \cdot κ \cdot π + π – (3 \cdot π / 2)$
κ = 0 ,
$φ_0 = 3 \cdot π / 2$ rad ή $φ_0 = π – (3π / 2)$ rad .
Δεκτή η λύση $φ_0 = 3 \cdot π / 2$ rad γιατί η αρχική φάση παίρνει τιμές :
$0 \le φ_0 < 2 \cdot π$.

2) Ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση . Αν :
Για $t_0 = 0$ s , το σώμα m έχει ταχύτητα $υ = + υ_{max}$ και κινείται προς την θέση x = + A ,
να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Λύση

Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική αρμονική ταλάντωση , άρα η εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι :
$υ = υ_{max} \cdot συν\,(ω \cdot t + φ_0)$.
Για $t_0 = 0$ s , η ταχύτητα του σώματος m είναι $υ = + υ_{max}$:
$+ υ_{max} = υ_{max} \cdot συν\,(ω \cdot 0 + φ_0) \Rightarrow$
$συν\,φ_0 = 1 \Rightarrow$
$συν\,φ_0 = συν\,0 \Rightarrow$
$φ_0 = 2 \cdot κ \cdot π \pm 0$
κ = 0 ,
$φ_0 = 0$ rad .
η κ = 1 δίνει $φ_0 = 2 \cdot π$, που απορρίπτεται .
Δεκτή η λύση $φ_0 = 0$ rad γιατί το σώμα την χρονική στιγμή t = 0 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας , όπου η ταχύτητα του είναι μέγιστη και η αρχική φάση παίρνει τιμές :
$0 \le φ_0 < 2 \cdot π$.

3)Η απομάκρυνση σώματος που πραγματοποιεί οριζόντια απλή αρμονική ταλάντωση δίδεται από την σχέση $x = 0{,}2 \cdot ημ\,π \cdot t$, (SI).
Να βρείτε:
α. το πλάτος της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης .
β. Την περίοδο, την συχνότητα και την κυκλική συχνότητα .
Δίνεται $π^2 \cong 10$.

Λύση

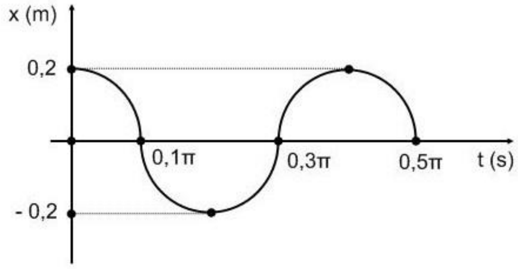
α.
Γενική εξίσωση της απομάκρυνσης :
$x = A \cdot ημ\,(ω \cdot t + φ_0)$,
Άρα A = 0,2 m , ω = π rad / s και $φ_0 = 0$.
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης (το πλάτος της ταχύτητας) :
$υ_{max} = ω \cdot A \Rightarrow$
$υ_{max} = 0{,}2 \cdot π$ m / s .
Η μέγιστη επιτάχυνσης ταλάντωσης (το πλάτος της επιτάχυνσης) :
$α_{max} = ω^2 \cdot A \Rightarrow$
$α_{max} = 0{,}2 \cdot π^2$ m / s$^2 \Rightarrow$
$α_{max} = 2$ m / s^2 .
β.
Για την περίοδο έχουμε :

$\omega = 2\cdot\pi / T \Rightarrow$
$T = 2\cdot\pi / \omega \Rightarrow$
$T = 2\cdot\pi / \pi \Rightarrow$
$T = 2$ s.
Για την συχνότητα έχουμε :
$f = 1 / T \Rightarrow$
$f = 1 / 2 \Rightarrow$
$f = 0{,}5$ Hz .
Για την κυκλική συχνότητα έχουμε :
$\omega = \pi$ rad / s.

4)Η απομάκρυνση σώματος που πραγματοποιεί οριζόντια απλή αρμονική ταλάντωση δίδεται από την σχέση :
$x = 0{,}1\cdot ημ\ 2\cdot\pi\cdot t$, (SI) .
Να βρείτε την απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές
α. $t = T / 12$,
β. $t = 5\cdot T / 12$.
Να θεωρήσετε ότι την χρονική στιγμή μηδέν το σώμα περνά από την ΘΙ του .
Λύση
α.
Η περίοδος δίνεται :
$T = 2\cdot\pi / \omega \Rightarrow$
$T = 2\cdot\pi / (2\cdot\pi) \Rightarrow$
$T = 1$ s .
για $t = T / 12$ έχουμε :
$x = 0{,}1\cdot ημ\ (2\cdot\pi\cdot t) \Rightarrow$
$x = 0{,}1\cdot ημ\ [(2\cdot\pi / T)\cdot(T / 12)] \Rightarrow$
$x = 0{,}1\cdot ημ\ (\pi / 6) \Rightarrow$
$x = 0{,}05$ m .
β.
Για $t = 5\cdot T / 12$ έχουμε :
$x = 0{,}1\cdot ημ\ (2\cdot\pi\cdot t) \Rightarrow$
$x = 0{,}1\cdot ημ\ [(2\cdot\pi / T)\cdot(5\cdot T / 12\ ) \Rightarrow$
$x = 0{,}1\cdot ημ\ (5\cdot\pi / 6) \Rightarrow$
$x = 0{,}05$ m .

5)Η απομάκρυνση σώματος που πραγματοποιεί κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση δίδεται από την σχέση $y = 0{,}2\cdot ημ\ (2\cdot\pi\cdot t)$, (SI).
Να βρείτε την χρονική στιγμή $t = (T / 8)$:
α. την ταχύτητά του ,
β. την επιτάχυνσή του .
Να θεωρήσετε ότι την χρονική στιγμή μηδέν το σώμα περνά από την Θ.Ι. του. και $\pi^2 \cong 10$.
Λύση
α.
$\upsilon = \omega\cdot A\cdot συν\ \omega t \Rightarrow$
$T = 2\cdot\pi / \omega \Rightarrow$
$T = 2\cdot\pi / (2\cdot\pi) \Rightarrow$
$T = 1$ s .
Η κυκλική συχνότητα ω :
$\omega = 2\cdot\pi / T$,
Η στιγμιαία ταχύτητα :
$\upsilon = 0{,}2\cdot 2\cdot\pi\cdot συν\ (2\cdot\pi / 8) \Rightarrow$
$\upsilon = 0{,}2\cdot 2\cdot\pi\cdot συν\ (\pi / 4) \Rightarrow$
$\upsilon = 0{,}2\cdot 2\cdot\pi\cdot(\sqrt{2} / 2) \Rightarrow$
$\upsilon = 0{,}2\cdot\pi\cdot\sqrt{2}$ m / s .
β.
$\alpha = -\ \omega^2\cdot A\cdot ημ\ (\omega t) \Rightarrow$
$\alpha = -\ 4\cdot\pi^2\cdot 0{,}2\cdot ημ\ (2\cdot\pi / 8) \Rightarrow$
$\alpha = -\ 4\cdot\pi^2\cdot 0{,}2\cdot ημ\ (\pi / 4) \Rightarrow$
$\alpha = -\ 4\cdot\pi^2\cdot 0{,}2\cdot(\sqrt{2} / 2) \Rightarrow$
$\alpha = -\ 4\cdot\sqrt{2}$ m / s^2 .

6) Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνση του σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος :



α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο .
β. Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο και να κάνετε την γραφική της παράσταση .
γ. Να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο και να κάνετε την γραφική της παράσταση .

Λύση

α.

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 0,2$ m και η περίοδος της $T = 0,4 \cdot \pi$ s .

Η γωνιακή συχνότητα :
$\omega = 2 \cdot \pi / T \Rightarrow$
$\omega = 2 \cdot \pi / (0,4 \cdot \pi) \Rightarrow$
$\omega = 5$ rad / s .

Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο , είναι :
$x = A \cdot ημ\ (\omega \cdot t + \phi_0)$.
για $t_0 = 0$:
$0,2 = 0,2 \cdot ημ\ (\omega \cdot 0 + \phi_0) \Rightarrow$
$ημ\ \phi_0 = 1 \Rightarrow$
$ημ\ \phi_0 = ημ\ (\pi / 2) \Rightarrow$
$\phi_0 = 2 \cdot κ \cdot \pi + (\pi / 2)$,
$κ = 0$, άρα :
$\phi_0 = \pi / 2$ rad .

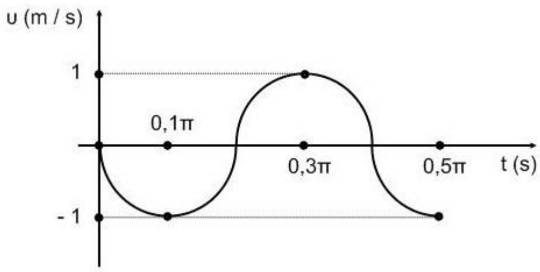
Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο , είναι :
$x = 0,2 \cdot ημ\ [5 \cdot t + (\pi / 2)]$, (S.I.) .

β.

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης , είναι :
$υ_{max} = \omega \cdot A \Rightarrow$
$υ_{max} = 5 \cdot 0,2 \Rightarrow$
$υ_{max} = 1$ m / s .

Η εξίσωση της ταχύτητας με τον χρόνο , είναι :
$υ = υ_{max} \cdot συν\ (\omega \cdot t + \phi_0) \Rightarrow$
$υ = 1 \cdot συν\ [5 \cdot t + (\pi / 2)]$, (S.I.) .

Η ζητούμενη γραφική παράσταση υ – t :

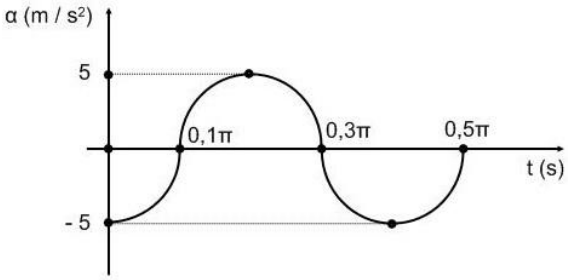


γ.

Η μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης , είναι :
$α_{max} = \omega^2 \cdot A \Rightarrow$
$α_{max} = 5^2 \cdot 0,2 \Rightarrow$
$α_{max} = 5$ m / s² .

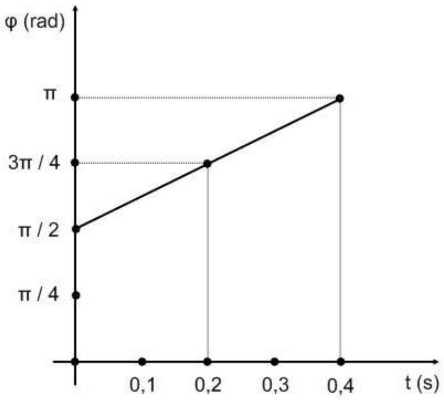
Η εξίσωση της επιτάχυνσης με τον χρόνο , είναι :
$α = - α_{max} \cdot ημ\ (\omega \cdot t + \phi_0) \Rightarrow$
$α = - 5 \cdot ημ\ [5 \cdot t + (\pi / 2)]$, (S.I.) .

Η ζητούμενη γραφική παράσταση α – t :

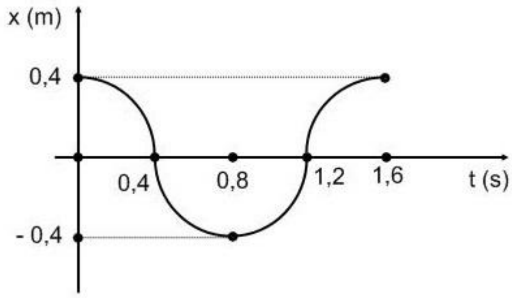


Σχόλιο :
Τα διαγράμματα υ – t και α – t , κατασκευάζονται από το βασικό τους διάγραμμα , αρκεί να το μετακινήσουμε στον x άξονα , απόσταση όση η αρχική φάση ϕ_0 .

7) Στο σχήμα δίνεται το διάγραμμα της φάσης της απλής αρμονικής ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο .



Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι $\upsilon_{max} = 0{,}5\cdot\pi$ m / s .
α. Να γράψετε την εξίσωσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο και να κάνετε την γραφική της παράσταση .
β. Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο και την εξίσωση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο .
Δίνεται $\pi^2 \cong 10$.
Λύση
α.
Το διάγραμμα που δίνετε είναι η γραφική παράσταση φάσης φ – χρόνου t :
$\phi = \phi_0 + \omega\cdot t$.
Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι για $t_0 = 0$ s η $\phi = \phi_0$, άρα $\phi_0 = \pi / 2$ rad .
Η κυκλική συχνότητα ω :
$\omega = \Delta\phi / \Delta t \Rightarrow$
$\omega = (\phi_2 - \phi_1) / (t_2 - t_1) \Rightarrow$
$\omega = [\pi - (3\cdot\pi / 4)] / (0{,}4 - 0{,}2) \Rightarrow$
$\omega = \pi / 0{,}8 \Rightarrow$
$\omega = 10\cdot\pi / 8 \Rightarrow$
$\omega = 1{,}25\cdot\pi$ rad / s .
Η περίοδος της ταλάντωσης :
$\omega = 2\cdot\pi / T \Rightarrow$
$T = 2\cdot\pi / \omega \Rightarrow$
$T = 2\cdot\pi / (1{,}25\cdot\pi) \Rightarrow$
$T = 20 / 12{,}5 \Rightarrow$
$T = 1{,}6$ s .
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι :
$\upsilon_{max} = \omega\cdot A \Rightarrow$
$A = \upsilon_{max} / \omega \Rightarrow$
$A = 0{,}5\cdot\pi / (1{,}25\cdot\pi) \Rightarrow$
$A = 0{,}4$ m .
Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο :
$x = A\cdot\eta\mu\,(\omega\cdot t + \phi_0) \Rightarrow$
$x = 0{,}4\cdot\eta\mu\,[1{,}25\cdot\pi\cdot t + (\pi / 2)]$.
Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης με τον χρόνο :



β.
Η εξίσωση της ταχύτητας με τον χρόνο :
$υ = υ_{max}·συν\ (ω·t + φ_0) \Rightarrow$
$υ = 0,5·π·συν\ [1,25·π·t + (π / 2)]$.
Η μέγιστη επιτάχυνση :
$α_{max} = ω^2·A \Rightarrow$
$α_{max} = (1,25·π)^2·0,4 \Rightarrow$
$α_{max} = 6,25\ m / s^2$.
Η εξίσωση της επιτάχυνσης με τον χρόνο :
$α = – α_{max}·ημ\ (ω·t + φ_0) \Rightarrow$
$α = – 6,25·ημ\ [1,25·π·t + (π / 2)]$.

8) Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα 2 / π Hz . Η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος είναι $α_{max} = 3,2\ m / s^2$.
Να υπολογίσετε :
α. Την περίοδο και την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης .
β. Το πλάτος της ταλάντωσης και την μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης .
Όταν το σώμα που ταλαντώνεται την χρονική στιγμή t = 0, βρίσκεται στη θέση x = 0,1 m κινούμενο προς την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης . Να υπολογίσετε :
γ. Την στιγμιαία ταχύτητα και την στιγμιαία επιτάχυνση στη θέση x = 0,1 m .
Λύση
α.
Η σχέση της περιόδου και της συχνότητας :
$f = 1 / T \Rightarrow$
$T = 1 / f \Rightarrow$
$T = 1 / (2 / π) \Rightarrow$
$T = π / 2\ s$.
Η κυκλική συχνότητα :
$ω = 2·π / T \Rightarrow$
$ω = 2·π / (π / 2) \Rightarrow$
$ω = 4\ rad / s$.
β.
Η μέγιστη επιτάχυνση (πλάτος της επιτάχυνσης) της ταλάντωσης :
$α_{max} = ω^2·A \Rightarrow$
$A = α_{max} / ω^2 \Rightarrow$
$A = 3,2 / 4^2 \Rightarrow$
$A = 0,2\ m$.
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι :
$υ_{max} = ω·A \Rightarrow$
$υ_{max} = 4·0,2 \Rightarrow$
$υ_{max} = 0,8\ m / s$.
γ.
Η σχέση της ταχύτητας με την απομάκρυνση :
$υ = ± ω·\sqrt{(A^2 – x^2)} \Rightarrow$
$υ = ± 4·\sqrt{(0,2^2 – 0,1^2)} \Rightarrow$
$υ = ± 4·\sqrt{(0,04 – 0,01)} \Rightarrow$
$υ = ± 4·\sqrt{0,03} \Rightarrow$
$υ = ± 4·0,1·\sqrt{3} \Rightarrow$
$υ = ± 0,4·\sqrt{3}\ m / s$.
Η σχέση της επιτάχυνσης με την απομάκρυνση :
$α = – ω^2·x \Rightarrow$
$α = – 4^2·0,1 \Rightarrow$
$α = – 1,6\ m / s^2$.

9) Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση . Στη θέση x = 1 m το σώμα έχει ταχύτητα $υ = 4·\sqrt{3}$ m και επιτάχυνση $α = – 16 \text{ m} / \text{s}^2$. Να υπολογίσετε :
α. Την περίοδο της ταλάντωσης .
β. Το πλάτος της ταλάντωσης .
γ. Την μέγιστη ταχύτητα και μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης .

Λύση

α.

Ισχύει :
$α = – ω^2·x ⇒$
$ω^2 = – (α / x) ⇒$
$ω^2 = – (- 16 / 1) ⇒$
$ω^2 = 16 ⇒$
$ω = \sqrt{16} ⇒$
$ω = 4$ rad / s .
Η σχέση γωνιακής συχνότητας και περιόδου :
$ω = 2·π / T ⇒$
$T = 2·π / ω ⇒$
$T = 2·π / 4 ⇒$
$T = π / 2$ s .

β.

Ισχύει :
$υ = ± ω·\sqrt{(A^2 – x^2)} ⇒$
$υ^2 = ω^2·(A^2 – x^2) ⇒$
$υ^2 = ω^2·A^2 – ω^2·x^2 ⇒$
$υ^2 + ω^2·x^2 = ω^2·A^2 ⇒$
$A^2 = (υ^2 + ω^2·x^2) / ω^2 ⇒$
$A = \sqrt{[(υ^2 + ω^2·x^2) / ω^2]} ⇒$
$A = \sqrt{\{[(4·\sqrt{3})^2 + 4^2·1^2] / 4^2\}} ⇒$
$A = \sqrt{\{[(16·3 + 16] / 16\}} ⇒$
$A = \sqrt{4} ⇒$
$A = 2$ m .

γ.

Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης :
$υ_{max} = ω·A ⇒$
$υ_{max} = 4·2 ⇒$
$υ_{max} = 8$ m / s .
Η μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης :
$α_{max} = ω^2·A ⇒$
$α_{max} = 4^2·2 ⇒$
$α_{max} = 32 \text{ m} / \text{s}^2$.

10) Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση . Αν η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος είναι T = 2 s , να υπολογίσετε :
α. τη χρονική στιγμή που το σώμα θα περάσει από την θέση $x = A·\sqrt{2} / 2$ για πρώτη φορά .
β. το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να περάσει το σώμα από την θέση $x = A·\sqrt{2} / 2$ για δεύτερη φορά στη θέση $x = – A·\sqrt{3} / 2$ για πρώτη φορά .

Λύση

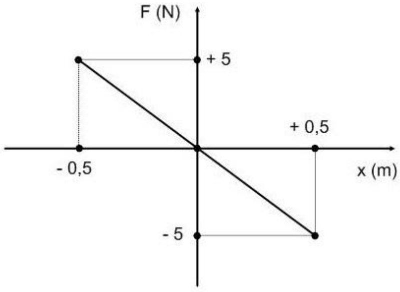
α.

Θεωρούμε t την χρονική στιγμή που το σώμα φτάνει για πρώτη φορά στη θέση $x = A·\sqrt{2} / 2$.
Ισχύει :
$x = A·ημ (ωt + φ_0) ⇒$
$A·\sqrt{2} / 2 = A·ημ\ ωt ⇒$
$ημ\ ωt = \sqrt{2} / 2 ⇒$
$ημ (2·π / T)·t = ημ (π / 4) ⇒$
$(2·π / T)·t = 2·κ·π + (π / 4)$ ή $(2·π / T)·t = 2·κ·π + π – (π / 4)$
για κ = 0 :
$(2·π / T)·t = π / 4$ ή $(2·π / T)·t = (3·π / 4) ⇒$
$t = T / 8$ ή $t = 3·T / 8$.
Ζητάμε την πρώτη φορά , άρα :
$t = T / 8 ⇒$
$t = 2 / 8 ⇒$
$t = 1 / 4 ⇒$
$t = 0,25$ s .

β.
Η δεύτερη φορά που το σώμα περνάει από την θέση $x = A\cdot\sqrt{2} / 2$ γίνεται την χρονική στιγμή t΄ :
$t' = 3\cdot T / 8 \Rightarrow$
$t' = 3\cdot 2 / 8 \Rightarrow$
$t' = 3 / 4 \Rightarrow$
$t' = 0{,}75$ s .
Θεωρούμε t΄΄ την χρονική στιγμή που το σώμα φτάνει για πρώτη φορά στη θέση $x = -A\cdot\sqrt{3} / 2$.
Ισχύει :
$x = A\cdot ημ\,(ωt + φ_0) \Rightarrow$
$-A\cdot\sqrt{3} / 2 = A\cdot ημ\,ωt \Rightarrow$
$ημ\,ωt'' = -\sqrt{3} / 2 \Rightarrow$
$ημ\,(2\cdot π / T)\cdot t'' = -ημ\,(π / 3) \Rightarrow$
$ημ\,(2\cdot π / T)\cdot t'' = ημ\,[π + (π / 3)] \Rightarrow$
$(2\cdot π / T)\cdot t'' = 2\cdot κ\cdot π + (4\cdot π / 3)$ ή $(2\cdot π / T)\cdot t'' = 2\cdot κ\cdot π + π - (4\cdot π / 3)$
για κ = 0 :
$(2\cdot π / T)\cdot t'' = 4\cdot π / 3$ ή $(2\cdot π / T)\cdot t'' = (-π / 3)$, απορρίπτεται γιατί $t > 0$.
$t'' = 4\cdot T / 6 \Rightarrow$
$t'' = 2\cdot T / 3 \Rightarrow$
$t'' = 2\cdot 2 / 3 \Rightarrow$
$t'' = 1{,}34$ s .
Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να περάσει το σώμα από την θέση $x = A\cdot\sqrt{2} / 2$ για δεύτερη φορά στη θέση $x = -A\cdot\sqrt{3} / 2$ για πρώτη φορά , είναι :
$Δt = t'' - t \Rightarrow$
$Δt = 1{,}34 - 0{,}75 \Rightarrow$
$Δt = 0{,}59$ s .

11) Η απομάκρυνση σώματος που πραγματοποιεί απλή αρμονική ταλάντωση δίδεται από την σχέση
$x = 0{,}2\cdot ημ\,(π / 2)\cdot t$, (SI) .
Να βρείτε το χρόνο που μεσολαβεί από τη στιγμή που το σώμα καθώς απομακρύνεται από τη Θ.Ι. του βρίσκεται σε θέση όπου η απομάκρυνσή του είναι 0,1 m, ώσπου να βρεθεί στην ίδια θέση καθώς επιστρέφει προς την Θ.Ι. του .
Λύση
Η κυκλική συχνότητα είναι :
$ω = (π / 2)$ rad / s .
Την χρονική στιγμή t_1 το σώμα έχει απομάκρυνση $x_1 = 0{,}1$ m και ταχύτητα $υ_1$,
Την χρονική στιγμή t_2 το σώμα έχει απομάκρυνση $x_1 = 0{,}1$ m και ταχύτητα $-υ_1$.
Ο χρόνος που μεσολαβεί είναι :
$Δt = t_2 - t_1$,
Για $x = x_1$:
$x_1 = 0{,}2\cdot ημ\,(π / 2)\cdot t \Rightarrow$
$0{,}1 = 0{,}2\cdot ημ\,(π / 2)\cdot t \Rightarrow$
$ημ\,(π / 2)\cdot t = 1 / 2 \Rightarrow$
$ημ\,(π / 2)\cdot t = ημ\,(π / 6) \Rightarrow$
$(π / 2)\cdot t_1 = 2\cdot κ\cdot π + (π / 6)$ και $(π / 2)\cdot t_2 = 2\cdot κ\cdot π + (5\cdot π / 6)$
για κ = 0 έχουμε
$t_1 = (1 / 3)$ s και $t_2 = (5 / 3)$ s .
Ο χρόνος που μεσολαβεί είναι :
$Δt = t_2 - t_1 \Rightarrow$
$Δt = (5 / 3) - (1 / 3) \Rightarrow$
$Δt = (4 / 3)$ s .

12) Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής
$x = A\cdot ημ\,ω\cdot t$. Το σώμα μετά από χρόνο 5 s έχει πραγματοποιήσει 50 πλήρεις ταλαντώσεις.
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα δύναμης επαναφοράς – απομάκρυνσης :

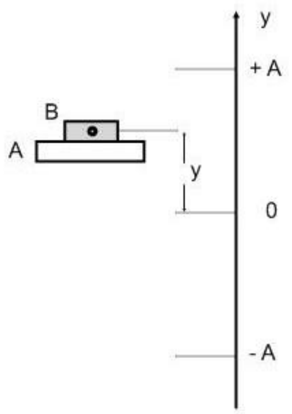


Να υπολογιστούν :
α. η μάζα του σώματος που ταλαντώνεται ,

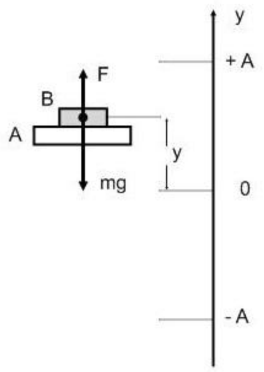
β. το πλάτος της ταχύτητας ,
γ. η διαφοράς φάσης μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1 = 0,15$ s και $t_2 = 0,5$ s .
δ. το μέτρο της απομάκρυνσης όταν η επιτάχυνση είναι $\alpha_{max} / 4$.
Δίνεται $\pi^2 \cong 10$.

Λύση
α.
Από το σχήμα , η μέγιστη δύναμη επαναφοράς , είναι $F_{max} = 5$ N και το πλάτος A = 0,5 m , άρα :
$F_{max} = D \cdot A \Rightarrow$
$D = F_{max} / A \Rightarrow$
$D = 5 / 0,5 \Rightarrow$
D = 10 N / m .
Υπολογίζουμε την κυκλική συχνότητα ω :
$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \Rightarrow$
$\omega = 2 \cdot \pi \cdot (N / t) \Rightarrow$
$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50 / 5 \Rightarrow$
$\omega = 20 \cdot \pi$ rad / s .
Η σταθερά επαναφοράς δίνεται :
$D = m \cdot \omega^2 \Rightarrow$
$m = D / \omega^2 \Rightarrow$
$m = 10 / (20 \cdot \pi)^2 \Rightarrow$
m = 1 / 400 kg $\Rightarrow$
m = 2,5 gr .
β.
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωση :
$\upsilon_{max} = \omega \cdot A \Rightarrow$
$\upsilon_{max} = 20 \cdot \pi \cdot 0,5 \Rightarrow$
$\upsilon_{max} = 10 \cdot \pi$ m / s .
γ.
Ισχύει :
$\omega = \Delta\phi / \Delta t \Rightarrow$
$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow$
$\Delta\phi = 20 \cdot \pi \cdot (0,5 - 0,15) \Rightarrow$
$\Delta\phi = 7 \cdot \pi$ rad .
δ.
Η μέγιστη επιτάχυνση :
$\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A$,
επίσης ισχύει :
$|\alpha| = \omega^2 \cdot |x|$.
διαιρούμε τις δύο παραπάνω σχέσεις :
$\alpha_{max} / |\alpha| = (\omega^2 \cdot A) / (\omega^2 \cdot |x|) \Rightarrow$
$\alpha_{max} / |\alpha| = A / |x| \Rightarrow$
$|x| = A \cdot |\alpha| / \alpha_{max} \Rightarrow$
$|x| = A \cdot (\alpha_{max} / 4) / \alpha_{max} \Rightarrow$
$|x| = A / 4 \Rightarrow$
$|x| = 0,5 / 4 \Rightarrow$
$|x| = 0,125$ m .

13) Τα δύο σώματα A και B που δείχνει το σχήμα είναι τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο και εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T = 2 s και πλάτος A = 0,25 m . Το σώμα B έχει μάζα m = 0,2 kg .



Α. Να βρείτε τη δύναμη που ασκεί το σώμα Β στο σώμα Α , στις θέσεις :
α. $y = 0$,
β. $y = -0,25$ m ,
γ. $y = +0,25$ m .
Β. Για ποια τιμή του πλάτους ταλάντωσης το σώμα Β θα εγκαταλείψει το σώμα Α , όταν η περίοδος της ταλάντωσης είναι T = 2 s ;
Γ. Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα της ταλάντωσης για την οποία το σώμα Β δε θα εγκαταλείψει το σώμα Α , όταν το πλάτος της ταλάντωσης είναι 0,25 m ;
Δίνονται $g = 10$ m / s² και $\pi^2 \cong 10$.
Λύση
Α.
Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Β μάζας m :
$D = m\cdot\omega^2 \Rightarrow$
$D = m\cdot(2\cdot\pi / T)^2 \Rightarrow$
$D = 0,2\cdot(4\cdot\pi^2 / 2^2) \Rightarrow$
$D = 2$ N / m .



Στο σώμα Β ασκούνται η δύναμη F από το σώμα Α και του βάρους του Β m·g , η συνισταμένη δύναμη ταλάντωσης , είναι :
$\Sigma F_y = -D\cdot y \Rightarrow$
$F - m\cdot g = -D\cdot y \Rightarrow$
$F = m\cdot g - D\cdot y \Rightarrow$
$F = 0,2\cdot 10 - 2\cdot y \Rightarrow$
$F = 2 - 2\cdot y \Rightarrow$
$F = 2\cdot(1 - y)$, (S.I.) .
α.
Για $y = 0$:
$F = 2\cdot(1 - 0) \Rightarrow$
$F = 2$ N .
β.
Για $y = -0,25$ m :
$F = 2\cdot[1 - (-0,25)] \Rightarrow$
$F = 2,5$ N .
γ.
Για $y = 0,25$ m :
$F = 2\cdot(1 - 0,25) \Rightarrow$
$F = 1,5$ N .
Η δύναμη F που ασκεί το σώμα Α στο σώμα Β , είναι δύναμη δράσης – αντίδρασης με την δύναμη F΄ που ασκεί το σώμα Β στο σώμα Α , άρα :
$F' = -F$, η F΄ θα έχει φορά προς τα κάτω .
α.
$F' = -2$ N .
β.
$F' = -2,5$ N .
γ.
$F' = -1,5$ N .
Β.
Για να είναι το σώμα Β σε επαφή με το σώμα Α πρέπει :
$F \geq 0 \Rightarrow$
$2\cdot(1 - y) \geq 0 \Rightarrow$
αφού $2 \geq 0$,
$1 - y \geq 0 \Rightarrow$
$y \leq 1$,
άρα $y_{max} = 1$ m , στη θέση 1 m το σώμα Β παύει να βρίσκεται πάνω στο σώμα Α .
Αν το πλάτος ταλάντωσης είναι 1 m , το σώμα Β χάνει την επαφή του με το σώμα Α .

Γ.
Πρέπει :
$F \geq 0 \Rightarrow$
$m \cdot g - D' \cdot A' \geq 0 \Rightarrow$
$D' \cdot A' \leq m \cdot g \Rightarrow$
$m \cdot \omega'^2 \cdot A' \leq m \cdot g \Rightarrow$
$\omega'^2 \cdot A' \leq g \Rightarrow$
$\omega'^2 \leq g / A' \Rightarrow$
$(2 \cdot \pi \cdot f')^2 \leq g / A' \Rightarrow$
$4 \cdot \pi^2 \cdot f'^2 \leq g / A' \Rightarrow$
$f'^2 \leq g / (4 \cdot \pi^2 \cdot A') \Rightarrow$
$f'^2 \leq 10 / (4 \cdot 10 \cdot 0{,}25) \Rightarrow$
$f'^2 \leq 1 \Rightarrow$
$f' \leq 1$.
Άρα
$f_{max}' = 1$ Hz .

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΗ Α.Α.Τ.

14) Ένα σώμα μάζας $m = 1$ kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση . Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος είναι $D = 100$ N / m . Η ενέργεια ταλάντωσης είναι $E = 2$ joule , να υπολογιστούν :
α. η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης ,
β. το πλάτος της επιτάχυνσης ,
γ. η απομάκρυνση του σώματος όταν η κινητική του ενέργεια είναι $K = 0{,}5$ J .
Λύση
α.
Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης :
$D = m \cdot \omega^2 \Rightarrow$
$\omega = \sqrt{(D / m)} \Rightarrow$
$\omega = \sqrt{(100 / 1)} \Rightarrow$
$\omega = 10$ rad / s .
β.
Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης :
$E = ½ \cdot D \cdot A^2 \Rightarrow$
$A = \sqrt{(2 \cdot E / D)} \Rightarrow$
$A = \sqrt{(2 \cdot 2 / 100)} \Rightarrow$
$A = 2 / 10 \Rightarrow$
$A = 0{,}2$ m .
το πλάτος της επιτάχυνσης (η μέγιστη της τιμή) :
$\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A \Rightarrow$
$\alpha_{max} = 10^2 \cdot 0{,}2 \Rightarrow$
$\alpha_{max} = 20$ m / s^2 .
γ.
Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης :
$E = K + U \Rightarrow$
$U = E - K \Rightarrow$
$½ \cdot D \cdot x^2 = E - K \Rightarrow$
$x^2 = 2 \cdot (E - K) / D \Rightarrow$
$x = \pm \sqrt{[2 \cdot (2 - 0{,}5) / 100]} \Rightarrow$
$x = \pm \sqrt{(3 / 100)} \Rightarrow$
$x = \pm 0{,}1 \cdot \sqrt{3}$ m .

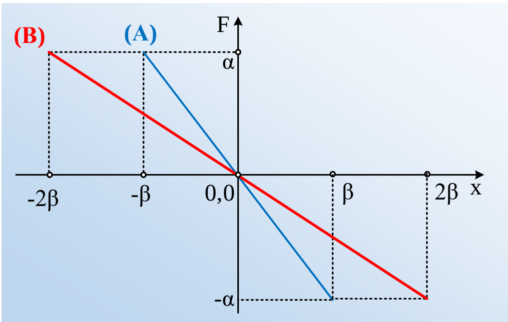
15) Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή t_1 έχει απομάκρυνση $x_1 = 5$ cm και ταχύτητα $\upsilon_1 = 10 \cdot \sqrt{3}$ m / s , ενώ την χρονική στιγμή t_2 έχει απομάκρυνση $x_2 = 5 \cdot \sqrt{2}$ cm και ταχύτητα $\upsilon_1 = 10 \cdot \sqrt{2}$ m / s .
Αν η μάζα του σώματος είναι $m = 0{,}5$ kg , να υπολογιστούν :
α. Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος ,
β. το πλάτος της ταλάντωσης ,
γ. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 .
Λύση
α.
Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης , έχουμε :
$E = K + U$,
$E = K_1 + U_1 \Rightarrow$

$E = ½·m·υ_1^2 + ½·D·x_1^2$.
και
$E = K_2 + U_2 \Rightarrow$
$E = ½·m·υ_2^2 + ½·D·x_2^2$.
Τα πρώτα μέλη είναι ίσα , άρα :
$½·m·υ_1^2 + ½·D·x_1^2 = ½·m·υ_2^2 + ½·D·x_2^2 \Rightarrow$
$m·(υ_1^2 – υ_2^2) = D·(x_2^2 – x_1^2) \Rightarrow$
$D = m·(υ_1^2 – υ_2^2) / (x_2^2 – x_1^2) \Rightarrow$
$D = 0,5·(3·10^2 – 2·10^2) / (2·25·10^{-4} – ·25·10^{-4}) \Rightarrow$
$D = 50 / 25·10^{-4} \Rightarrow$
$D = 2·10^4$ N / m .
β.
Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης , έχουμε :
$E = K_1 + U_1 \Rightarrow$
$E = ½·m·υ_1^2 + ½·D·x_1^2 \Rightarrow$
$A = \sqrt{[(m·υ_1^2 + D·x_1^2) / D]} \Rightarrow$
$A = \sqrt{[(0,5·3·10^{-2} – 2·10^4·25·10^{-4}) / (2·10^4)]} \Rightarrow$
$A = 0,1$ m .
γ.
Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας :
$dK / dt = dW_{ΣF} / dt \Rightarrow$
$dK / dt = ΣF·(dx / dt) \Rightarrow$
$dK / dt = ΣF·υ$.
Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 :
$(dK / dt)_1 = – D·x_1·υ_1 \Rightarrow$
$(dK / dt)_1 = – 2·10^4·5·10^{-2}·10·\sqrt{3} \Rightarrow$
$(dK / dt)_1 = – \sqrt{3}·10^4$ j / s .

16) Σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση .
α. Αν K = U , να υπολογίσετε την απομάκρυνση και την ταχύτητα ,
β. Αν $K = 3·U$, να υπολογίσετε την απομάκρυνση και την ταχύτητα ,
γ. Αν $x = + A·\sqrt{3} / 2$ να υπολογίσετε το πηλίκο K / U ,
δ. Αν $υ = + υ_{max}·\sqrt{3} / 2$ να υπολογίσετε το πηλίκο K / U ,
Λύση
α.
Ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας στις ταλαντώσεις :
$E = K + U \Rightarrow$
$K = U$,
$E = U + U \Rightarrow$
$E = 2·U \Rightarrow$
$½·D·A^2 = 2·½·D·x^2 \Rightarrow$
$x^2 = A^2 / 2 \Rightarrow$
$x = ± A·\sqrt{2} / 2$.
Επίσης :
Ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας στις ταλαντώσεις :
$E = K + U \Rightarrow$
$K = U$,
$E = K + K \Rightarrow$
$E = 2·K \Rightarrow$
$½·m·υ_{max}^2 = 2·½·m·υ^2 \Rightarrow$
$υ^2 = υ_{max}^2 / 2 \Rightarrow$
$υ = ± υ_{max}·\sqrt{2} / 2$.
β.
Ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας στις ταλαντώσεις :
$E = K + U \Rightarrow$
$K = 3·U$,
$E = 3·U + U \Rightarrow$
$E = 4·U \Rightarrow$
$½·D·A^2 = 4·½·D·x^2 \Rightarrow$
$x^2 = A^2 / 4 \Rightarrow$
$x = ± A / 2$.
Επίσης :
Ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας στις ταλαντώσεις :
$E = K + U \Rightarrow$

$K = 3 \cdot U \Rightarrow U = K / 3$,
$E = K + (K / 3) \Rightarrow$
$E = 4 \cdot K / 3 \Rightarrow$
$½ \cdot m \cdot υ_{max}^2 = (4 / 3) \cdot ½ \cdot m \cdot υ^2 \Rightarrow$
$υ^2 = 4 \cdot υ_{max}^2 / 3 \Rightarrow$
$υ = \pm υ_{max} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} / 3$.
γ.
Ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας στις ταλαντώσεις :
$E = K + U \Rightarrow$
$K = E - U$.
Το ζητούμενο πηλίκο είναι :
$K / U = (E - U) / U \Rightarrow$
$K / U = (½ \cdot D \cdot A^2 - ½ \cdot D \cdot x^2) / (½ \cdot D \cdot x^2) \Rightarrow$
$K / U = (A^2 - x^2) / (x^2) \Rightarrow$
$K / U = [A^2 - (A \cdot \sqrt{3} / 2)^2] / (A \cdot \sqrt{3} / 2)^2 \Rightarrow$
$K / U = [1 - (3 / 4)] / (3 / 4) \Rightarrow$
$K / U = 1 / 4$.
δ.
Ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας στις ταλαντώσεις :
$E = K + U \Rightarrow$
$U = E - K$.
Το ζητούμενο πηλίκο είναι :
$K / U = K / (E - K) \Rightarrow$
$K / U = (½ \cdot m \cdot υ^2) / (½ \cdot m \cdot υ_{max}^2 - ½ \cdot m \cdot υ^2) \Rightarrow$
$K / U = (υ^2) / (υ_{max}^2 - υ^2) \Rightarrow$
$K / U = (υ_{max} \cdot \sqrt{3} / 2)^2 / [υ_{max}^2 - (υ_{max} \cdot \sqrt{3} / 2)^2] \Rightarrow$
$K / U = (3 / 4) / [1 - (3 / 4)] \Rightarrow$
$K / U = (3 / 4) / (1 / 4) \Rightarrow$
$K / U = 3$

17) Δύο σώματα Α και Β της ίδιας μάζας εκτελούν ΑΑΤ, στην ίδια διεύθυνση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η μεταβολή της δύναμης επαναφοράς, που ασκείται σε κάθε σώμα, σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή του x.



i) Για τις ενέργειες ταλάντωσης των δύο σωμάτων ισχύει:

α) $E_A = 2E_B$, β) $E_A = E_B$, γ) $E_A = ½\, E_B$.

ii) Αν τα δυο σώματα κάποια στιγμή ξεκινούν ταυτόχρονα από τις ακραίες αρνητικές θέσεις της ταλάντωσής τους, τότε θα συναντηθούν για πρώτη φορά στην θέση x, όπου:

α) $x < 0$, β) $x=0$, γ) $x >0$.

Απάντηση:

Η δύναμη επαναφοράς, ικανοποιεί την εξίσωση $F=-D \cdot x$, οπότε για τις δύο σταθερές επαναφοράς έχουμε:

$$D_A = D_1 = -\frac{F_{A,max}}{A_A} = -\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$D_B = D_2 = -\frac{F_{B,max}}{A_B} = -\frac{-a}{2\beta} = \frac{a}{2\beta}$$

i) Για τις ενέργειες ταλάντωσης έχουμε:

$$E_A = \frac{1}{2} D_1 A_A^2 = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta^2 = \frac{1}{2}\alpha\beta$$

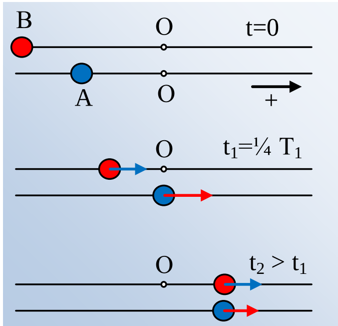
$$E_B = \frac{1}{2} D_2 A_B^2 = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{2\beta} \cdot (2\beta)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha\beta = 2E_A$$

Σωστό το γ).

ii)Για τις περιόδους των δύο σωμάτων έχουμε:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{\beta \cdot m}{a}} \quad \text{και} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\beta \cdot m}{a}} = T_1\sqrt{2}$$

Αλλά ξεκινώντας τα δυο σώματα από τις ακραίες θέσεις (x_1=-β και x_2=-2β), το καθένα θα χρειαστεί χρόνο ¼ Τ για να φτάσει στην θέση ισορροπίας, x=0. Αλλά αφού $T_2>T_1$, πρώτο θα περάσει από τη θέση ισορροπίας το σώμα Α το οποίο ξεκίνησε και από τη θέση x=-β, ενώ το Β ακολουθεί, απέχοντας κάθε στιγμή μεγαλύτερη απόσταση από τη θέση ισορροπίας. Συνεπώς η συνάντηση των δύο σωμάτων θα συμβεί την στιγμή t_2, μετά τη στιγμή ¼ T_1, δεξιά της θέσης ισορροπίας, σε κάποια θετική απομάκρυνση x.



Σωστό το γ).

18) Στο σχήμα απεικονίζεται σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = m$,που είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k , και εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D_1= k με την πάνω ακραία θέση του να συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

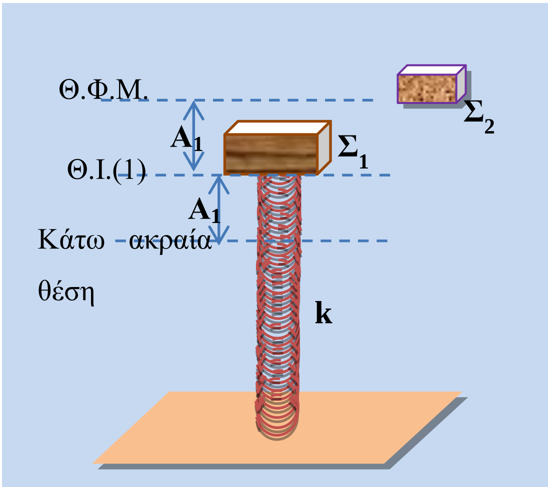
Θέλουμε να τοποθετήσουμε πάνω στο Σ_1, σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = \frac{m}{2}$, όταν αυτό θα βρίσκεται

α) στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του ή

β) στην κάτω ακραία θέση. Αν E_α είναι η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος στην α περίπτωση και E_β στη β, τότε θα ισχύει

1) $E_\alpha = E_\beta$ 2) $E_\alpha = 3E_\beta$ 3) $E_\alpha = 9E_\beta$

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση και δικαιολογείστε την επιλογή σας.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

σωστή η (3).Όπως βλέπουμε στα παρακάτω σχήματα, όταν τοποθετήσουμε το Σ_2 πάνω στο Σ_1 όταν αυτό βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, το πλάτος της νέας

ταλάντωσης θα είναι

$$A_\alpha = \frac{(m_1+m_2)g}{k} = \frac{(m+\frac{m}{2})g}{k} = \frac{3mg}{2k}$$

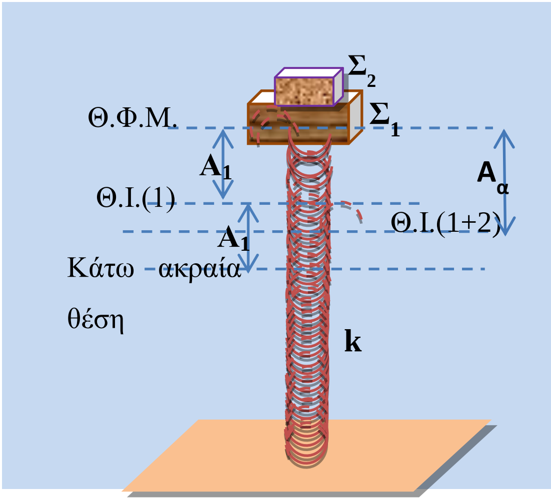
και η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι

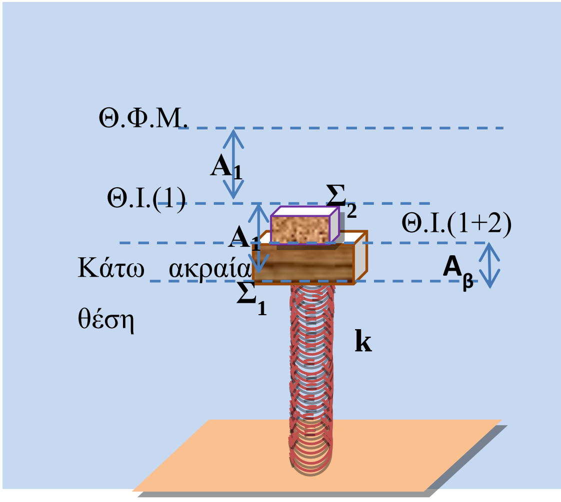
$$E_\alpha = \frac{1}{2}kA_\alpha^2 = \frac{9m^2g^2}{8k}$$

ενώ όταν το τοποθετήσουμε στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του Σ_1 , το πλάτος θα είναι $A_\beta = 2A_1 - \frac{(m_1+m_2)g}{k} = 2\frac{mg}{k} - \frac{3mg}{2k} = \frac{mg}{2k}$

και η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι

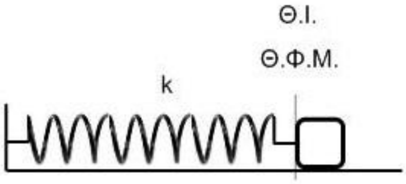
$E_\beta = \frac{1}{2}kA_\beta^2 = \frac{m^2g^2}{8k}$ άρα $E_\alpha = 9E_\beta$



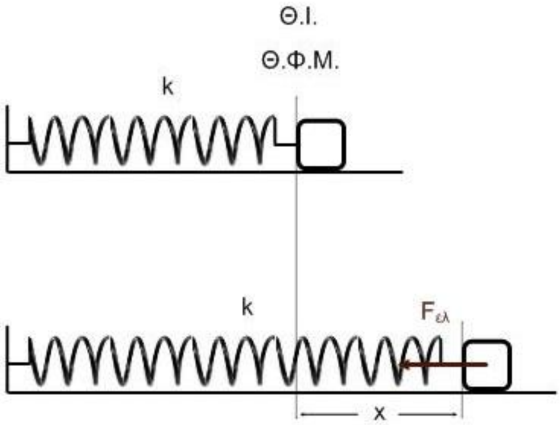


ΕΛΑΤΗΡΙΑ ΚΑΙ Α.Α.Τ.

19) Σώμα μάζας 0,2 kg ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς 20 N / m .

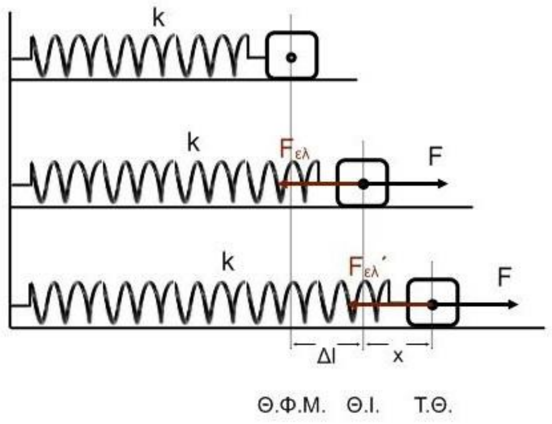


Αν το σώμα απομακρυνθεί λίγο από τη θέση του κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και αφεθεί στη συνέχεια ελεύθερο :
α. να δείξετε ότι θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση ,
β. να βρείτε την περίοδό του .
Λύση
α.
Όταν το σώμα βρίσκεται στην τυχαία θέση x δεξιότερα από την θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ.) του ελατηρίου δέχεται την δύναμη από το ελατήριο $F_{ελ}$ που έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά. Θεωρώντας θετικές τις δυνάμεις που έχουν την κατεύθυνση της θέσης x εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα :



$ΣF = – F_{ελ} \Rightarrow$
$ΣF = – k \cdot x$
Άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με D = k (σταθερά επαναφοράς)
β.
$T = 2 \cdot π \cdot \sqrt{(m / D)} \Rightarrow$
$T = 2 \cdot π \cdot \sqrt{(0,2 / 20)} \Rightarrow$
$T = π / 5$ s .

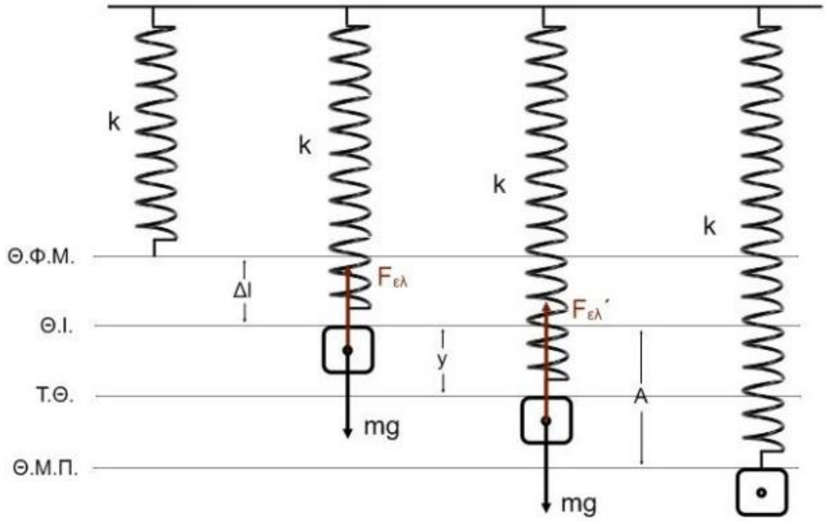
20) Ένα σώμα μάζας m = 1 kg είναι δεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 100 N / m . Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο και το σύστημα ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο . Ασκούμε στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη F προς τα δεξιά μέτρου 20 N .
α. Να αποδειχθεί ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση .
β. Να βρεθεί η ενέργεια της ταλάντωσης .
Λύση
α.
Στην θέση ισορροπίας που δεν ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους , γράφουμε την συνθήκη ισορροπίας :



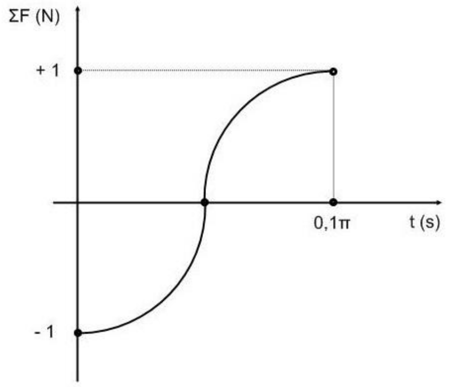
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda} - F = 0 \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda} = F \Rightarrow$
$k \cdot \Delta l = F$ … (1) .
Από την σχέση (1) υπολογίζουμε το Δl :
$\Delta l = F / k \Rightarrow$
$\Delta l = 20 / 100 \Rightarrow$
$\Delta l = 0{,}2$ m .
Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Νεύτωνα στην τυχαία θέση θεωρώντας θετικές τις δυνάμεις που έχουν την φορά της απομάκρυνσης x
$\Sigma F' = F - F' \Rightarrow$
$\Sigma F' = F - k \cdot (\Delta l + x) \Rightarrow$
$\Sigma F' = F - k \cdot \Delta l - k \cdot x \Rightarrow$
με την βοήθεια της σχέσης (1) ,
$\Sigma F' = - k \cdot x$.
Παρατηρούμε ότι $\Sigma F' = - D \cdot x$, άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με D = k = 100 N / m .
β.
Όταν το σώμα βρίσκεται αρχικά στη θέση φυσικού μήκους έχει ταχύτητα μηδέν , επομένως η θέση αυτή είναι η ακραία θέση .
Η ακραία θέση απέχει από τη θέση ισορροπίας κατά Δl = A = 0,2 m .
Επομένως :
$E = ½ \cdot D \cdot A^2 \Rightarrow$
$E = ½ \cdot k \cdot \Delta l^2 \Rightarrow$
$E = ½ \cdot 100 \cdot (2 \cdot 10^{-1})^2 \Rightarrow$
$E = ½ \cdot 100 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$
E = 2 joule .

21) Σώμα μάζας m = 0,1 kg κρέμεται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου του οποίου το πάνω άκρο είναι στερεωμένο στην οροφή .
Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας O κατά 10 cm προς τα κάτω και τη στιγμή t = 0 το αφήνουμε ελεύθερο. Τότε αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T = 0,2·π s . O κατακόρυφος άξονας y΄y πάνω στον οποίο κινείται το σώμα έχει θετική φορά προς τα κάτω και είναι y = 0 για το σημείο O .
α. Να βρεθεί η σταθερά k του ελατηρίου .
β. Να βρεθεί η απόλυτη τιμή της συνισταμένης των δυνάμεων και της δύναμης του ελατηρίου όταν το σώμα βρίσκεται σε απόσταση 5 cm κάτω και πάνω από το O .
γ. Να βρεθεί η (αλγεβρική) τιμή της συνισταμένης των δυνάμεων και της δύναμης του ελατηρίου συναρτήσει του χρόνου και να γίνουν τα αντίστοιχα διαγράμματα από t = 0 έως t = T / 2 .
Δίνεται $g = 10$ m / s² .

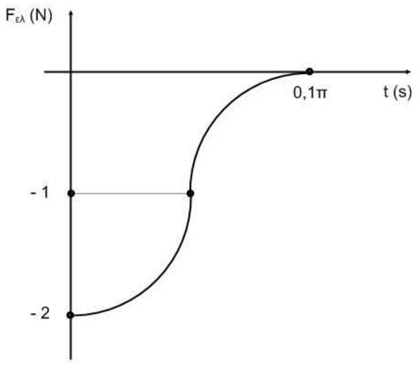
Λύση
α.



Ισχύει :
$k = D \Rightarrow$
$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow$
$k = m \cdot (2 \cdot \pi / T)^2 \Rightarrow$
$k = 0{,}1 \cdot [2 \cdot \pi / (0{,}2 \cdot \pi)^2] \Rightarrow$
$k = 10$ N / m .
β.
Η απόλυτη τιμή της συνισταμένης των δυνάμεων όταν το σώμα βρίσκεται σε απόσταση 5 cm κάτω και πάνω από το Ο :
$|\Sigma F| = |- k \cdot y| \Rightarrow$
$|\Sigma F| = 10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$
$|\Sigma F| = 0{,}5$ N για $y = \pm 5$ cm .
Από την θέση ισορροπίας Ο έχουμε :
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$
$k \cdot \Delta l = m \cdot g \Rightarrow$
$\Delta l = m \cdot g / k \Rightarrow$
$\Delta l = 0{,}1$ m .
Η δύναμη του ελατηρίου :
$F_{\varepsilon\lambda} = - k \cdot (\Delta l + y)$,
Όταν $y = + 5$ cm $= + 0{,}05$ m .
$F_{\varepsilon\lambda} = - 10 \cdot (0{,}1 + 0{,}05) \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda} = - 1{,}5$ N .
Η απόλυτη τιμή της δύναμης του ελατηρίου :
$|F_{\varepsilon\lambda}| = 1{,}5$ N .
Όταν $y = - 5$ cm $= - 0{,}05$ m .
$F_{\varepsilon\lambda} = - 10 \cdot (0{,}1 - 0{,}05) \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda} = - 0{,}5$ N .
Η απόλυτη τιμή της δύναμης του ελατηρίου :
$|F_{\varepsilon\lambda}| = 0{,}05$ N .
γ.
Η συνισταμένη δύναμη :
$\Sigma F = - k \cdot y \Rightarrow$
$\Sigma F = - k \cdot A \cdot ημ\,[\omega \cdot t + (\pi / 2)]$ (S.I.) .
Το πλάτος $A = 0{,}1$ m .
Η κυκλική συχνότητα :
$\omega = 2 \cdot \pi / T \Rightarrow$
$\omega = 2 \cdot \pi / (0{,}2 \cdot \pi) \Rightarrow$
$\omega = 10$ rad / s .
Η αρχική φάση :
$\varphi_0 = \pi / 2$ rad , γιατί για $t = 0$, $y = + A$.
Άρα :
$\Sigma F = - 10 \cdot 0{,}1 \cdot ημ\,[10 \cdot t + (\pi / 2)] \Rightarrow$
$\Sigma F = - 1 \cdot ημ\,[10 \cdot t + (\pi / 2)]$ (S.I.) ή
$\Sigma F = - συν\,(10 \cdot t)$.

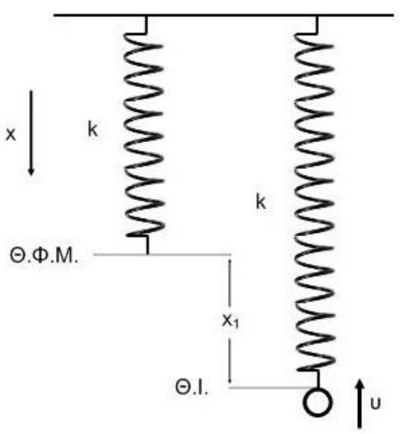


Για να προσδιορίσουμε την αλγεβρική τιμή της $F_{ελ}$ θεωρούμε μια τυχαία απομάκρυνση προς την θετική φορά .
Η συνισταμένη δύναμη δίνεται :
$ΣF = – k·y ⇒$
(η δύναμη του βάρους είναι θετική , ενώ στην $F_{ελ}$ δεν βάζουμε πρόσημο . Το ελατήριο κατά την ταλάντωση δεν συσπειρώνεται μόνο επιμηκύνεται)
$F_{ελ} + m·g = – k·y ⇒$
$F_{ελ} = – m·g – k·A·ημ\ (ω·t + φ_0) ⇒$
$F_{ελ} = – 0,1·10 – συν\ (10·t) ⇒$
$F_{ελ} = – 1 – συν\ (10·t)$.



Επίσης μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής :
$F_{ελ} = – k·(Δl + y) ⇒$
$F_{ελ} = – k·Δl – k·y ⇒$
$F_{ελ} = – k·Δl – k·A·ημ\ [ω·t + (π / 2)]$ και τελικά θα καταλήξουμε στην ίδια σχέση .

22) Σώμα μάζας m = 1 kg εξαρτάται από το κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 400 N / m .
Το ελατήριο είναι στερεωμένο στην οροφή ανελκυστήρα και κρέμεται ακίνητο (σε σχέση με τον ανελκυστήρα) καθώς αυτός ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ = √2 m / s .
Σε μια στιγμή ο ανελκυστήρας σταματάει απότομα .
Α. Ποιο θα είναι το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει η μάζα m , αν :
α. Το ελατήριο ήταν παραμορφωμένο εξαιτίας του βάρους του σώματος ,
β. Συγκρατούμε ακίνητο το σώμα ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος .
Να θεωρήσετε την κατεύθυνση προς τα κάτω θετική και g = 10 m / s² .
Λύση
Α.
α.



Η μάζα m ισορροπεί στο άκρο του ελατηρίου . Το σώμα m βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του όταν ο ανελκυστήρας σταματάει απότομα . Η ταχύτητα του σώματος m , η ταχύτητα υ (του ανελκυστήρα) θα είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης $υ_{max}$, αφού το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του :

$υ = υ_{max} \Rightarrow$

$υ = ω·Α \Rightarrow$

$υ = (2·π / Τ)·Α \Rightarrow$

$υ = \{2·π / [2·π·\sqrt{(m / k)}]\}·Α \Rightarrow$

$υ = Α·\sqrt{(k / m)} \Rightarrow$

$Α = υ·\sqrt{(m / k)} \Rightarrow$

$Α = \sqrt{2}·\sqrt{(1 / 400)} \Rightarrow$

$Α = \sqrt{2} / 20$ m .

β.

Το σώμα m στη θέση ισορροπίας του :

$ΣF_y = 0 \Rightarrow$

$F_{ελ} – w = 0 \Rightarrow$

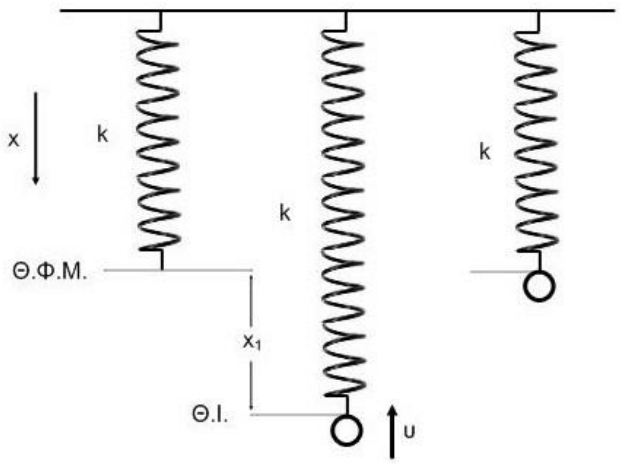
$k·x_1 – m·g = 0 \Rightarrow$

$x_1 = m·g / k \Rightarrow$

$x_1 = 1·10 / 400 \Rightarrow$

$x_1 = 0{,}025$ m .

Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος , όταν ο ανελκυστήρας σταματάει απότομα και την ταχύτητα του ανελκυστήρα .



Η μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας :

$Ε = Κ + U \Rightarrow$

$½·k·Α^2 = ½·m·υ^2 + ½·k·x_1^2 \Rightarrow$

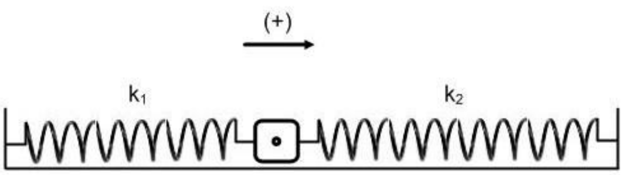
$Α^2 = (m / k)·υ^2 + x_1^2 \Rightarrow$

$Α = \sqrt{[(m / k)·υ^2 + x_1^2]} \Rightarrow$

$Α = \sqrt{[(1 / 400)·(\sqrt{2})^2 + (0{,}025)^2]} \Rightarrow$

$Α = 0{,}075$ m .

23)Το σώμα μάζας m = 1 Kg που φαίνεται στην εικόνα αρχικά ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στα ελεύθερα άκρα ελατηρίου με σταθερές $k_1 = 10$ N / m και $k_2 = 6$ N / m .



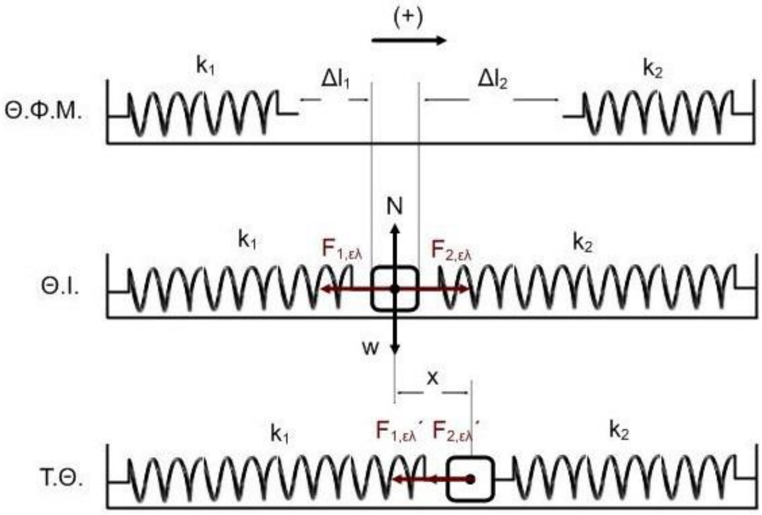
Αν απομακρύνουμε το σώμα από τη Θ.Ι. κατά x = 0,1 m :

α. να δείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση ,

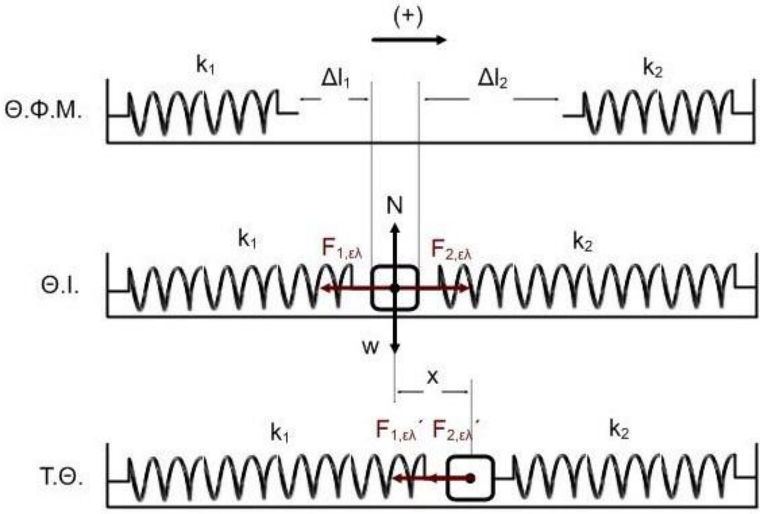
β. να βρείτε την περίοδό του ,

γ. να βρείτε τη μέγιστη κινητική του ενέργεια .

Λύση
α.



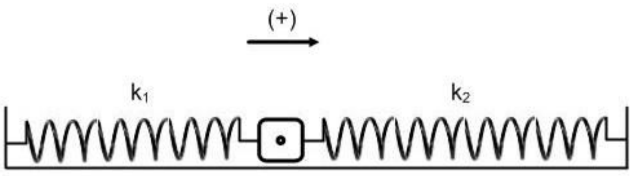
Για την θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) , έχουμε στον οριζόντιο άξονα x΄x :
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$
$F_{1,\varepsilon\lambda} - F_{2,\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow$
$k_1 \cdot \Delta l_1 - k_2 \cdot \Delta l_2 = 0 \Rightarrow$
$k_1 \cdot \Delta l_1 = k_2 \cdot \Delta l_2$ (συνθήκη ισορροπίας) .
Στον κατακόρυφο άξονα :
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$
$N - w = 0 \Rightarrow$
$N = m \cdot g$.
Στην τυχαία απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα , θεωρώντας θετικές τις δυνάμεις που έχουν την κατεύθυνση του x .



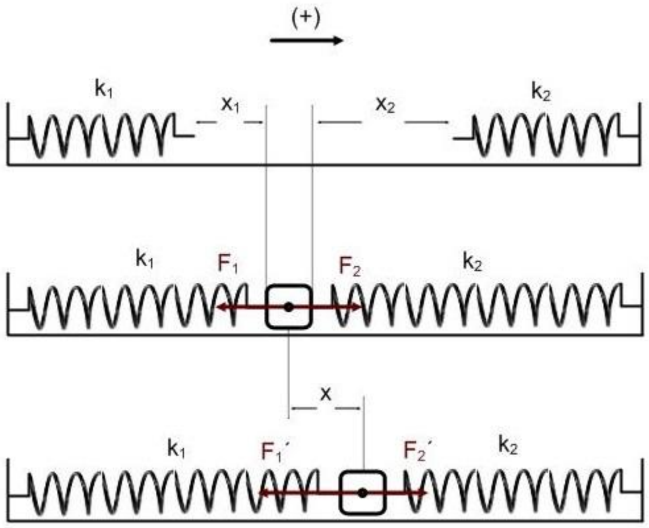
$\Sigma F_x{}' = 0 - F_{1,\varepsilon\lambda}{}' - F_{2,\varepsilon\lambda}{}' \Rightarrow$
$\Sigma F_x{}' = - k_1 \cdot (\Delta l_1 + x) - k_2 \cdot (x - \Delta l_2) \Rightarrow$
$\Sigma F_x{}' = - k_1 \cdot \Delta l_1 - k_1 \cdot x - k_2 \cdot x + k_2 \cdot \Delta l_2 \Rightarrow$
ισχύει : $- k_1 \cdot \Delta l_1 + k_2 \cdot \Delta l_2$, άρα ,
$\Sigma F_x{}' = - (k_1 + k_2) \cdot x$,
άρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά $D = k_1 + k_2$, σταθερά επαναφοράς .
β.
Η περίοδος της ταλάντωσης είναι :
$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(m / D)} \Rightarrow$
$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{[m / (k_1 + k_2)]} \Rightarrow$
$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{[1 / (10 + 6)]} \Rightarrow$
$T = \pi / 2$ s .
γ.
Δίνεται x = 0,1 m , άρα A = 0,1 m .
Η μέγιστη κινητική ενέργεια ισούται με την ολική ενέργεια :
$K_{max} = E \Rightarrow$
$K_{max} = ½ \cdot D \cdot A^2 \Rightarrow$

K_{max} = ½·(k_1 + k_2)·A² ⇒
K_{max} = ½·(10 + 6)·0,1² ⇒
K_{max} = 0,08 J .

24) Σώμα μάζας m = 1 kg ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων , όπως φαίνεται στο σχήμα (τα ελατήρια έχουν επιμηκυνθεί από το φυσικό τους μήκος) και έχουν σταθερές k_1 = 300 N / m και k_2 = 100 N / m .



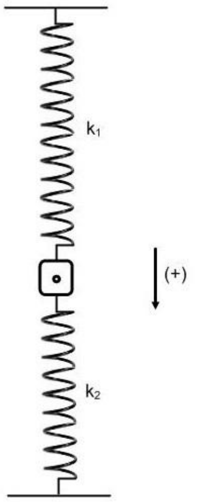
Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων και την αφήνουμε ελεύθερη .
α. Να βρείτε την σχέση των επιμηκύνσεων των ελατηρίων , στη θέση ισορροπίας του συστήματος .
β. Να αποδείξετε ότι το σύστημα μάζας – ελατηρίων θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο Τ .
β. Πόση είναι η ολική ενέργεια της ταλάντωσης , αν το σώμα από το ένα άκρο της ταλάντωσης στο άλλο διανύει την ελάχιστη απόσταση των 0,4 m .
Θεωρήστε θετική φορά προς τα δεξιά .
Λύση
α.



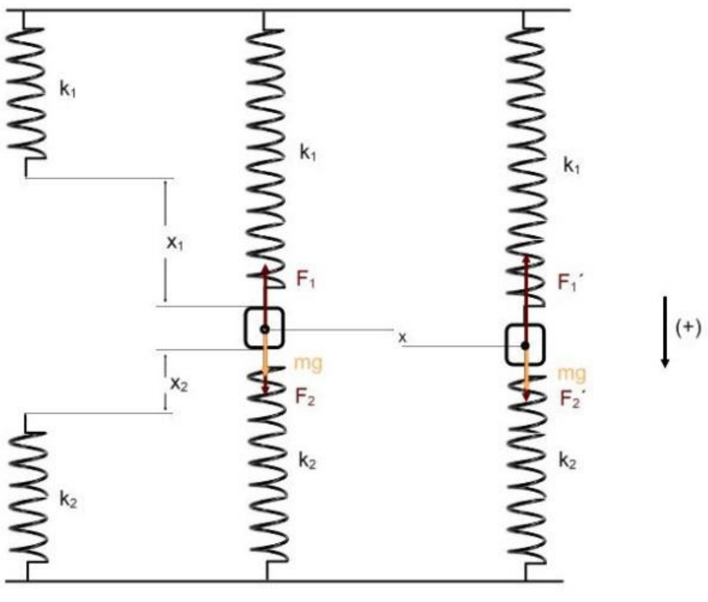
Στη θέση ισορροπίας ισχύει :
$ΣF_x$ = 0 ⇒
– F_1 + F_2 = 0 ⇒
– $k_1·x_1$ + $k_2·x_2$ = 0 … (1) ⇒
$k_1·x_1$ = $k_2·x_2$ ⇒
300·x_1 = 100·x_2 ⇒
3·x_1 = x_2 .
β.
Στη τυχαία θέση :
$ΣF_x΄$ = – $F_1΄$ + $F_2΄$ ⇒
$ΣF_x΄$ = – k_1·(x_1 + x) + k_2·(x_2 – x) ⇒
$ΣF_x΄$ = – $k_1·x_1$ – k_1·x + $k_1·x_2$ – k_2·x ⇒
με την βοήθεια της σχέσης (1) ,
$ΣF_x΄$ = – k_1·x – k_2·x ⇒
$ΣF_x΄$ = – (k_1 + k_2)·x .
Η παραπάνω εξίσωση είναι της μορφής ΣF = – D·x , άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά :
D = (k_1 + k_2) ⇒
D = (300 + 100) ⇒
D = 400 N / m .
Η περίοδος της ταλάντωσης είναι :
T = 2·π·√(m / D) ⇒
T = 2·π·√(1 / 400) ⇒
T = 2·π / 20 ⇒
T = π / 10 s .
γ.
Το σώμα από το ένα άκρο της ταλάντωσης στο άλλο διανύει την ελάχιστη απόσταση των 0,4 m , άρα

$2·A = 0,4 \Rightarrow$
$A = 0,4 / 2 \Rightarrow$
$A = 0,2$ m .
Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι :
$E = ½·D·A^2 \Rightarrow$
$E = ½·400·0,2^2 \Rightarrow$
$E = 8$ joule .

25)Σώμα μάζας m = 1 kg ισορροπεί συνδεδεμένο στα άκρα δύο κατακόρυφων ιδανικών ελατηρίων , όπως φαίνεται στο σχήμα .



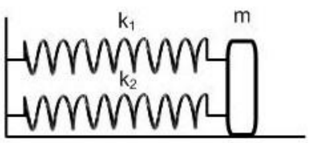
Οι σταθερές των ελατηρίων είναι $k_1 = 250$ N / m και k2 = 150 N / m . Απομακρύνουμε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων και την αφήνουμε ελεύθερη .
α. Να βρείτε την σχέση των επιμηκύνσεων των ελατηρίων , στη θέση ισορροπίας του συστήματος .
β. Να δείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο Τ .
γ. Αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι Α = 0,3 m , βρείτε την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης στη θέση $x = – A·\sqrt{3} / 3$.
Θεωρείστε θετική φορά την φορά προς τα κάτω .
Λύση
α.

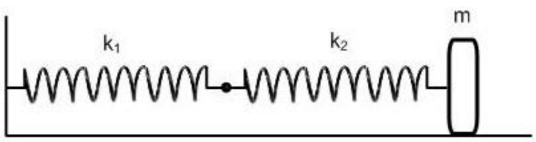


Στη θέση ισορροπίας ισχύει :
$ΣF_y = 0 \Rightarrow$
$– F_1 + F_2 + m·g = 0 \Rightarrow$
$– k_1·x_1 + k_2·x_2 + m·g = 0$ … (1) $\Rightarrow$
$– k_1·x_1 + k_2·x_2 + 1·10 = 0 \Rightarrow$
$k_2·x_2 = k_1·x_1 – 10 \Rightarrow$
$150·x_1 = 250·x_2 – 10 \Rightarrow$
$15·x_1 = 25·x_2 – 1$.
β.
Στη τυχαία θέση :
$ΣF_x΄ = – F_1΄ + F_2΄ + m·g \Rightarrow$
$ΣF_x΄ = – k_1·(x_1 + x) + k_2·(x_2 – x) + m·g \Rightarrow$

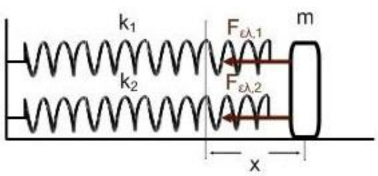
$\Sigma F_x{}' = -k_1 \cdot x_1 - k_1 \cdot x + k_2 \cdot x_2 - k_2 \cdot x + m \cdot g \Rightarrow$
με την βοήθεια της σχέσης (1) ,
$\Sigma F_x{}' = -k_1 \cdot x - k_2 \cdot x \Rightarrow$
$\Sigma F_x{}' = -(k_1 + k_2) \cdot x$.
Η παραπάνω εξίσωση είναι της μορφής $\Sigma F = -D \cdot x$, άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά :
$D = (k_1 + k_2) \Rightarrow$
$D = (250 + 150) \Rightarrow$
$D = 400$ N / m .
Η περίοδος της ταλάντωσης είναι :
$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(m / D)} \Rightarrow$
$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(1 / 400)} \Rightarrow$
$T = 2 \cdot \pi / 20 \Rightarrow$
$T = \pi / 10$ s .
γ.
Αρχή διατήρησης της ενέργειας στις ταλαντώσεις :
$E = K + U \Rightarrow$
$K = E - U \Rightarrow$
$K = ½ \cdot D \cdot A^2 - ½ \cdot D \cdot x^2 \Rightarrow$
$K = ½ \cdot D \cdot (A^2 - x^2) \Rightarrow$
$K = ½ \cdot D \cdot [A^2 - (A \cdot \sqrt{3} / 3)^2] \Rightarrow$
$K = ½ \cdot D \cdot [A^2 - (A^2 \cdot 3 / 3^2)] \Rightarrow$
$K = ½ \cdot D \cdot (A^2 / 3) \Rightarrow$
$K = ½ \cdot 400 \cdot (0{,}09 / 3) \Rightarrow$
$K = 6$ joule .

26)Δύο ελατήρια παράλληλα & δύο ελατήρια σε σειρά
Έχουμε δύο ελατήρια σταθεράς $k_1 = 6$ N / m και $k_2 = 12$ N / m και σώμα μάζας m = 2 kg .
Το σώμα μάζας m ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο , ενώ :
I. είναι συνδεδεμένο με τα δύο ελατήρια παράλληλα μεταξύ τους ,
II. είναι συνδεδεμένο με τα δύο ελατήρια σε σειρά μεταξύ τους .



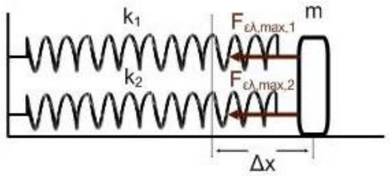


Εκτρέπουμε το σώμα μάζας m προς τα δεξιά κατά Δx = 0,2 m και αφήνουμε το σώμα ελεύθερο .
Να :
α. αποδειχθεί ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ,
β. υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης και η ολική ενέργεια ταλάντωσης .
Λύση
I.
α.

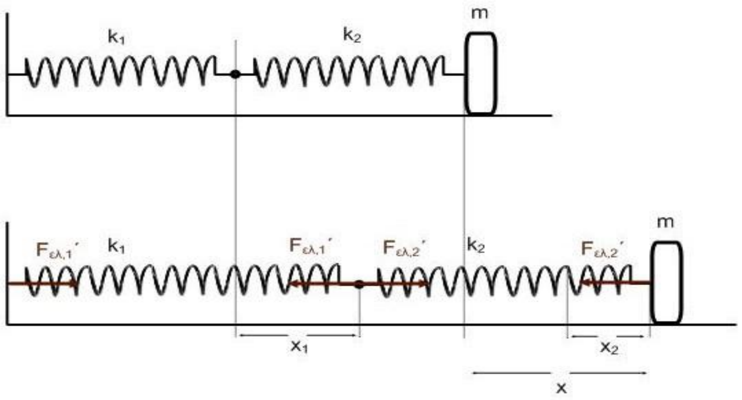


Στη τυχαία θέση :
$\Sigma F = -F_{ελ,1} - F_{ελ,2} \Rightarrow$
$\Sigma F = -k_1 \cdot x - k_2 \cdot x \Rightarrow$
$\Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x$,
άρα είναι της μορφής :
$\Sigma F = -D \cdot x$, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση , με σταθερά
$D = k_1 + k_2 \Rightarrow$
$D = 6 + 12 \Rightarrow$

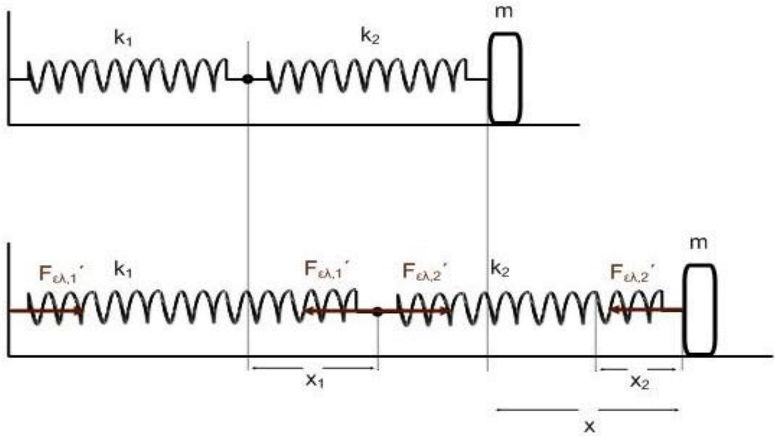
$D = 18\ N / m$.
β.
Η περίοδος της ταλάντωσης :
$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(m / D)} \Rightarrow$
$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(2 / 18)} \Rightarrow$
$T = 2 \cdot \pi / 3\ s$.
Το σώμα εκτρέπεται προς τα δεξιά κατά Δx , άρα το πλάτος της ταλάντωσης $A = \Delta x = 0{,}2\ m$.



Η ολική ενέργεια ταλάντωσης :
$E = ½ \cdot D \cdot A^2 \Rightarrow$
$E = ½ \cdot 18 \cdot 0{,}2^2 \Rightarrow$
$E = 0{,}36$ joule .
ΙΙ.
α.



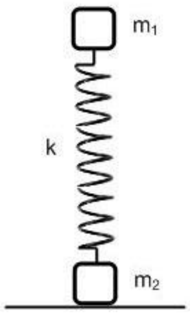
Στη τυχαία θέση , τα ελατήρια ασκούν δυνάμεις :
$F_{ελ,1}΄ = k_1 \cdot x_1$ και $F_{ελ,2}΄ = k_2 \cdot x_2$,
το ένα στο άλλο , οι οποίες είναι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης , άρα έχουν το ίδιο μέτρο :
$F_{ελ,1}΄ = F_{ελ,2}΄ \Rightarrow$
$k_1 \cdot x_1 = k_2 \cdot x_2 \Rightarrow$
$x_1 = (k_2 / k_1) \cdot x_2$.
Ισχύει :
$x = x_1 + x_2 \Rightarrow$
$x = (k_2 / k_1) \cdot x_2 + x_2 \Rightarrow$
$x = [(k_2 / k_1) + 1] \cdot x_2 \Rightarrow$
$x_2 = [k_1 / (k_1 + k_2)] \cdot x$.



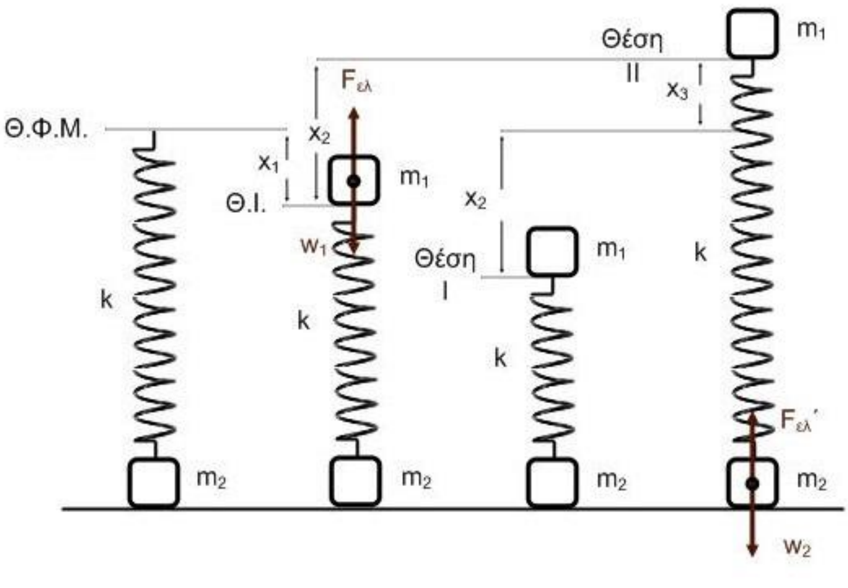
Στη τυχαία θέση η συνισταμένη δύναμη ταλάντωσης :
$ΣF΄ = - F_{ελ,2}΄ \Rightarrow$
$ΣF΄ = - k_2 \cdot x_2 \Rightarrow$
$ΣF΄ = - k_2 \cdot [k_1 / (k_1 + k_2)] \cdot x \Rightarrow$
$ΣF΄ = - [k_1 \cdot k_2 / (k_1 + k_2)] \cdot x$.
άρα είναι της μορφής :

$\Sigma F' = -D' \cdot x$, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση , με σταθερά
$D' = k_1 \cdot k_2 / (k_1 + k_2)$
$D' = 6 \cdot 12 / (6 + 12) \Rightarrow$
$D' = 72 / 18 \Rightarrow$
$D' = 4$ N / m .
β.
Η περίοδος της ταλάντωσης :
$T' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(m / D')} \Rightarrow$
$T' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(2 / 4)} \Rightarrow$
$T' = \pi \cdot \sqrt{2}$ s .
Το σώμα εκτρέπεται προς τα δεξιά κατά Δx , άρα το πλάτος της ταλάντωσης A = Δx = 0,2 m .   .
Η ολική ενέργεια ταλάντωσης :
$E' = ½ \cdot D' \cdot A^2 \Rightarrow$
$E' = ½ \cdot 4 \cdot 0{,}2^2 \Rightarrow$
$E' = 0{,}08$ joule .

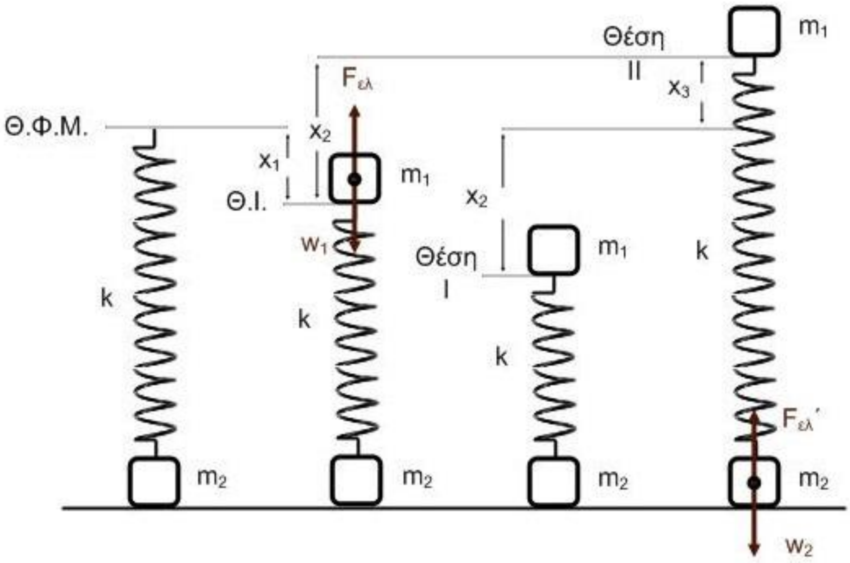
27) Τα σώματα με μάζες $m_1 = 0{,}2$ kg και $m_2 = 0{,}8$ kg που φαίνονται στην εικόνα ηρεμούν δεμένα στα άκρα του κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k = 100 N / m .



Να βρείτε πόσο το πολύ μπορούμε να σπρώξουμε το σώμα m_1 προς τα κάτω , ώστε όταν το αφήσουμε ελεύθερο μόλις και να μη σηκωθεί από το δάπεδο το σώμα m_2 .
Δίνεται g = 10 m / s² .
Λύση

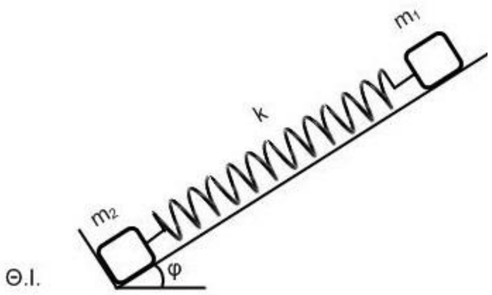


Στο σχήμα που δίνεται , το σώμα m_1 ισορροπεί :
(το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά x_1)
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$
$F_{ελ} - w_1 = 0 \Rightarrow$
$k \cdot x_1 - m_1 \cdot g = 0 \Rightarrow$
$k \cdot x_1 = m_1 \cdot g$ … (I) .
Αν το σώμα πιεστεί προς τα κάτω κατά x_2 , το σώμα βρίσκεται στη θέση I .
Το σώμα αφήνεται ελεύθερο και πραγματοποιεί απλή αρμονική ταλάντωση .
Το σώμα θα βρεθεί στη θέση II , συμμετρική ως προς τη θέση I .
Το ελατήριο θα έχει επιμηκυνθεί κατά x_3 , από το σχήμα βλέπουμε :
$x_2 = x_3 + x_1 \Rightarrow$
$x_3 = x_2 - x_1$.



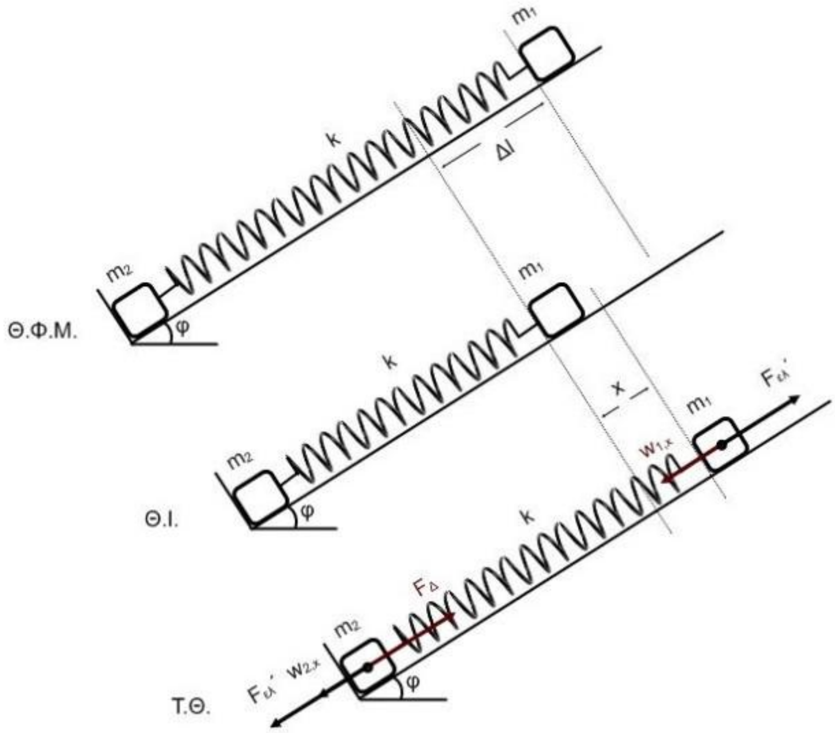
Στο σώμα m_2 ασκούνται οι δυνάμεις $F_{ελ}' = k \cdot x_3$ και $w_2 = m_2 \cdot g$.
Για να μη σηκωθεί το σώμα m_2 από το δάπεδο , θα πρέπει :
$\Sigma F_y' \leq 0 \Rightarrow$
$F_{ελ}' - w_2 \leq 0 \Rightarrow$
$k \cdot x_3 \leq m_2 \cdot g \Rightarrow$
$k \cdot (x_2 - x_1) \leq m_2 \cdot g \Rightarrow$
$k \cdot x_2 - k \cdot x_1 \leq m_2 \cdot g \Rightarrow$
από τη σχέση (Ι) ,
$k \cdot x_2 - m_1 \cdot g \leq m_2 \cdot g \Rightarrow$
$k \cdot x_2 \leq m_2 \cdot g + m_1 \cdot g \Rightarrow$
$x_2 \leq (m_2 + m_1) \cdot g / k$.
Μας ζητείται πόσο το πολύ μπορούμε να σπρώξουμε το σώμα m_1 προς τα κάτω , άρα :
$x_{2,max} = (m_2 + m_1) \cdot g / k \Rightarrow$
$x_{2,max} = (0{,}8 + 0{,}2) \cdot 10 / 100 \Rightarrow$
$x_{2,max} = 0{,}1$ m .

28) Τα σώματα με μάζες $m_1 = 0{,}2$ kg και $m_2 = 0{,}8$ kg που φαίνονται στο σχήμα ισορροπούν στο λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30°$. Τα σώματα είναι δεμένα στα άκρα του ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 100 N / m με το σώμα m_2 να είναι σε επαφή με το πλάγιο δάπεδο που είναι κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο .



Να βρείτε πόσο το πολύ μπορούμε να σπρώξουμε το σώμα m_1 , προς τα κάτω , ώστε όταν το αφήσουμε ελεύθερο μόλις και να μην σηκωθεί από το δάπεδο το σώμα μάζας m_2 .

Λύση
Αν σπρώξουμε το σώμα m_1 προς τα κάτω κατά d το σώμα m_1 θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση αρκεί το σώμα m_2 να είναι συνεχώς σε επαφή με το πλάγιο δάπεδο .
Όταν το m_1 βρίσκεται κάτω από την θέση ισορροπίας δεν υπάρχει περίπτωση το m_2 να χάσει την επαφή του με το πλάγιο δάπεδο .
Για την θέση ισορροπίας του m_1 έχουμε :
$\Sigma F = 0 \Rightarrow$
$F_{ελ} - w_{1,x} = 0 \Rightarrow$
$k \cdot \Delta l - m_1 \cdot g \cdot ημ\,\varphi = 0 \Rightarrow$
$k \cdot \Delta l = m_1 \cdot g \cdot ημ\,\varphi$ … (Ι) .



Στην τυχαία θέση x πάνω από την θέση ισορροπίας του m_1 για την ισορροπία του m_2 έχουμε :

$ΣF' = 0 \Rightarrow$

$F_Δ - F_{ελ}' - w_{2,x} = 0 \Rightarrow$

$F_Δ - k\cdot(Δl - x) - m_2\cdot g\cdot ημφ = 0 \Rightarrow$

$F_Δ = k\cdot Δl - k\cdot x + m_2\cdot g\cdot ημφ \Rightarrow$

από την σχέση (I) ,

$F_Δ = m_1\cdot g\cdot ημ\ φ - k\cdot x + m_2\cdot g\cdot ημφ$.

Για να είναι σε επαφή το m_2 με το δάπεδο πρέπει :

$F_Δ \geq 0 \Rightarrow$

$m_1\cdot g\cdot ημ\ φ + m_2\cdot g\cdot ημφ - k\cdot x \geq 0 \Rightarrow$

$(m_1 + m_2)\cdot g\cdot ημ\ φ \geq k\cdot x \Rightarrow$

$x \leq [(m_1 + m_2)\cdot g\cdot ημ\ φ] / k$.

Άρα η μέγιστη τιμή :

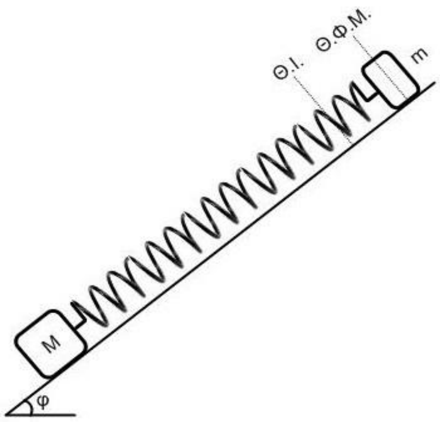
$x_{max} = [(m_1 + m_2)\cdot g\cdot ημ\ φ] / k \Rightarrow$

$x_{max} = [(0{,}2 + 0{,}8)\cdot 10\cdot(1 / 2)] / 100 \Rightarrow$

$x_{max} = 5 / 100 \Rightarrow$

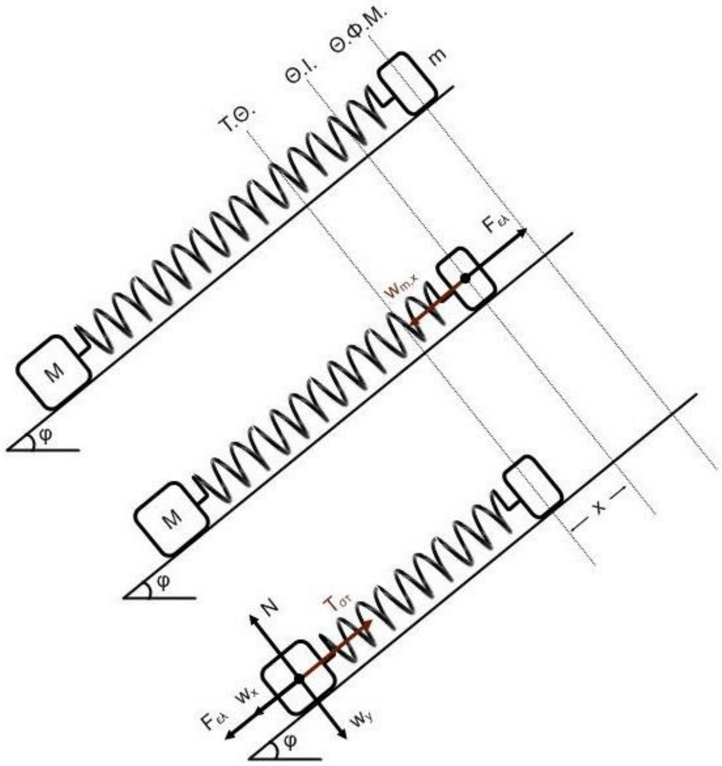
$x_{max} = 5\cdot 10^{-2}$ m , άρα τόσο μπορούμε να σπρώξουμε το m_1 κάτω από την θέση ισορροπίας .

29) Τα σώματα M και m είναι στερεωμένα στα άκρα ελατηρίου σταθεράς k . Το σώμα μάζας M εμφανίζει τριβή με το κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ , ενώ το σώμα m μπορεί να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A στο τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου που είναι λείο.



Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή $μ_s$ του συντελεστή οριακής τριβής έτσι ώστε το σώμα m να ταλαντώνεται με πλάτος A και το σώμα M να μην γλιστρά στο κεκλιμένο επίπεδο .

Λύση



Για την Θ.Ι. (θέση ισορροπίας) της ταλάντωσης του σώματος m ισχύει :
$\Sigma F_{m,x} = 0 \Rightarrow$
$F_{ελ} - w_{m,x} = 0 \Rightarrow$
$F_{ελ} = w_{m,x} \Rightarrow$
$k \cdot \Delta l = m \cdot g \cdot ημ\,φ$ … (I)
$\Rightarrow \Delta l = m \cdot g \cdot ημ\,φ / k$.
Όταν το σώμα m βρίσκεται στην τυχαία απομάκρυνση x το σώμα M ισορροπεί .
Για την ισορροπία του σώματος M έχουμε :
$F_{ελ}' + w_x - T_{στ} = 0 \Rightarrow$
$T_{στ} = w_x + F_{ελ}' \Rightarrow$
$T_{στ} = M \cdot g \cdot ημ\,φ + k \cdot (\Delta l + x) \Rightarrow$
$T_{στ} = M \cdot g \cdot ημ\,φ + k \cdot \Delta l + k \cdot x \Rightarrow$
$T_{στ} = M \cdot g \cdot ημ\,φ + m \cdot g \cdot ημ\,φ + k \cdot x$.
Για να μην γλιστρά το M :
Η $T_{στ,max} \le T_{ορ} \Rightarrow$
$T_{στ,max}$ έχουμε όταν x = A ,
$(M + m) \cdot g \cdot ημ\,φ + k \cdot A \le μ_s \cdot M \cdot g \cdot συν\,φ \Rightarrow$
$[(M + m) \cdot g \cdot ημ\,φ] / (M \cdot g \cdot συν\,φ) + k \cdot A / (M \cdot g \cdot συν\,φ) \le μ_s \cdot M \cdot g \cdot συν\,φ / (M \cdot g \cdot συν\,φ) \Rightarrow$
$[(M + m) \cdot εφ\,φ] / (M) + k \cdot A / (M \cdot g \cdot συν\,φ) \le μ_s$.
Η ελάχιστη τιμή $μ_{s,min}$ είναι ίση με :
$μ_{s,min} = [(M + m) \cdot εφ\,φ] / (M) + k \cdot A / (M \cdot g \cdot συν\,φ)$.

30)

Σώμα μάζας **m = 1 kg** ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς **k = 100 N/m**, στερεωμένου στο άλλο του άκρο.

Από τη χρονική στιγμή $\mathbf{t_o = 0}$ και μετά, ασκούμε στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη που έχει μέτρο **F = 20 N** και το σώμα αρχίζει να κινείται επιμηκύνοντας το ελατήριο.

Η δύναμη καταργείται ακαριαία τη στιγμή $\mathbf{t_1}$ που το σώμα έχει διανύσει διάστημα **S = 0,2 m**.

Ζητούνται:

1) Η ταχύτητα $\mathbf{υ_1}$ που έχει αποκτήσει το σώμα στο τέλος του διαστήματος **S**, καθώς και η μέγιστη επιμήκυνση $\mathbf{\Delta\ell_{max}}$ του ελατηρίου.

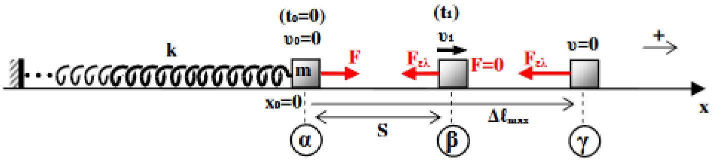
2) Η χρονική στιγμή $\mathbf{t_1}$.

3) Η μέγιστη ταχύτητα $\mathbf{υ_{max}}$ που αποκτά το σώμα από τη στιγμή που ξεκίνησε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) Θεωρούμε για ευκολία τη θέση (α) του φυσικού μήκους του ελατηρίου, στην οποία και ισορροπεί αρχικά το σώμα, ως αρχή του x άξονα. Οπότε ισχύουν οι αλγεβρικές σχέσεις:

$\Delta\ell = x$ και $F_{ελ} = -k \cdot x$



Για την ταχύτητα υ_1 θα εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ από (α) έως (β):

$\Sigma W = \Delta K \rightarrow$

$\rightarrow F \cdot S - \frac{1}{2} k \cdot S^2 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_1^2 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 2\ m/s}$

Για την μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου θα εφαρμόσουμε πάλι το ΘΜΚΕ από (α) έως (γ), όπου μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα του σώματος:

$\Sigma W = \Delta K \rightarrow F \cdot S - \frac{1}{2} k \cdot \Delta\ell_{max}^2 = 0 \rightarrow \boxed{\Delta\ell_{max} = 0{,}2\sqrt{2}\ m}$

2) Για τον υπολογισμό της στιγμής t_1, θα δείξουμε πρώτα ότι, όσο ασκείται η $\vec{F}$, η κίνηση είναι ΓΑΤ, και θα προσδιορίσουμε τα χαρακτηριστικά της.

Σε τυχαία θέση x ($x \leq 0{,}2m$ και $t \leq t_1$) ισχύει: $\Sigma F_x = F + F_{ελ} = F - k \cdot x$

Υπάρχει θέση x_1 όπου η ΣF_x μηδενίζεται: $F - k \cdot x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0{,}2\ m$

Δηλαδή η θέση αυτή συμπίπτει με τη θέση (β) και αποτελεί θέση ισορροπίας.

Σε απομάκρυνση $x' = x - x_1$ από τη (β) ισχύει:

$$\Sigma F_x = F - k \cdot x = F - k \cdot (x' + x_1) = F - k \cdot x' - k \cdot x_1 \rightarrow \Sigma F_x = -k \cdot x'$$

Πρόκειται επομένως για ΓΑΤ με Θ.Ι. την θέση (β), και με D = k. Οπότε $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\ r/s$

και η περίοδος θα είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}2\pi\ sec$

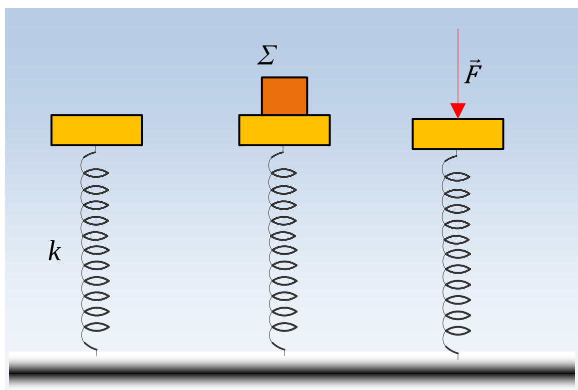
Η θέση εκκίνησης (α) αποτελεί ακραία θέση, οπότε: $\boxed{t_1 = T/4 = 0{,}05\pi\ sec}$

3) Μετά την κατάργηση της $\vec{F}$, το σώμα εκτελεί νέα ταλάντωση, ΑΑΤ, με την επίδραση μόνο της δύναμης του ελατηρίου, άρα με νέα θέση ισορροπίας την αρχική θέση (α) και την ίδια σταθερά D = k, οπότε και ίδια περίοδο $T = 0{,}2\pi$ sec.

Η θέση εκκίνησης της νέας ΑΑΤ είναι η θέση (β) με $x = x_1 = 0{,}2$ m και το πλάτος της είναι $A = \Delta\ell_{max} = 0{,}2\sqrt{2}\ m$, εφόσον η θέση (γ) αποτελεί ακραία θέση της νέας ταλάντωσης.

Προφανώς, το σώμα θα αποκτήσει τη μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα τη στιγμή που επιστρέφει στη θέση ισορροπίας (α) και το μέτρο της θα είναι: $\boxed{\upsilon_{max} = A \cdot \omega = 2\sqrt{2}\ m/s}$

31) Μια πλάκα μάζας Μ ηρεμεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, το οποίο στηρίζεται στο έδαφος, όπως στο σχήμα. Κάποια στιγμή τοποθετούμε πάνω στην πλάκα ένα σώμα Σ βάρους w=10N, με αποτέλεσμα να κινηθεί προς τα κάτω και να διανύσει απόσταση s_1 σε χρόνο t_1, πριν κινηθεί ξανά προς τα πάνω. Σε μια διαφορετική εκδοχή, ασκούμε στην πλάκα μια κατακόρυφη δύναμη μέτρου F=10N, οπότε αυτή μετακινείται κατακόρυφα κατά s_2 σε χρόνο t_2, πριν κινηθεί ξανά προς τα πάνω.



i) Για τις αποστάσεις s_1 και s_2 ισχύει:

α) $s_1 < s_2$, β) $s_1 = s_2$, γ) $s_1 > s_2$.

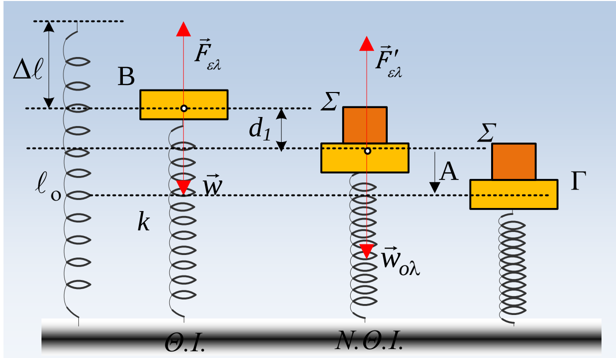
ii) Για τους χρόνους t_1 και t_2 που διαρκεί η προς τα κάτω κίνηση ισχύει:

α) $t_1 < t_2$, β) $t_1 = t_2$, γ) $t_1 > t_2$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας, θεωρώντας γνωστό ότι οι κινήσεις είναι ΑΑΤ.

Απάντηση:

Αρχικά η πλάκα ισορροπεί στη θέση Β, έχοντας συσπειρώσει το ελατήριο κατά Δl, όπου:



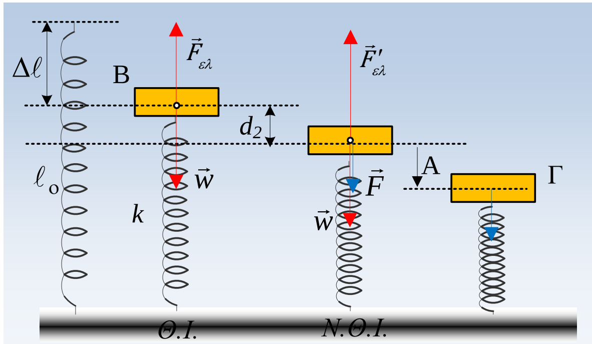
$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=w \rightarrow k\cdot\Delta\ell = Mg \ (1)$$

Μόλις πάνω στην πλάκα τοποθετήσουμε το σώμα Σ, το σύστημα θα ταλαντωθεί γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας για την οποία θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow \vec{F}'_{\varepsilon\lambda}=w_{o\lambda} \rightarrow k\cdot(\Delta\ell+d_1)=(M+m)g$$

Και λόγω της (1), τελικά παίρνουμε:

$$d_1=\frac{mg}{k}$$



Στην δεύτερη περίπτωση που ασκούμε στο σώμα την σταθερή κατακόρυφη δύναμη F, θα έχουμε ξανά αλλαγή στη θέση ισορροπίας, η οποία θα είναι χαμηλότερα της αρχικής κατά d_2, όπου:

$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow F'_{\varepsilon\lambda}=w+F \rightarrow k\cdot(\Delta\ell+d_2)=Mg+F \rightarrow$$

$$d_2=\frac{F}{k}$$

Αλλά από τα δεδομένα $F=w_\Sigma=mg=10N$, οπότε $d_1=d_2$.

i) Σωστό το β). Η αρχική θέση Β είναι ακραία θέση για τις ταλαντώσεις που θα ακολουθήσουν. Αλλά αφού $d_1=d_2$ σημαίνει ότι οι δύο ταλαντώσεις θα έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης Α, ενώ το διάστημα που θα διανύσει η πλάκα και στις δύο περιπτώσεις θα είναι $s=2\cdot A=2d_1=2d_2$.

ii) Το χρονικό διάστημα της προς τα κάτω κίνησης της πλάκας, από την μια ακραία θέση της ταλάντωσης στην άλλη, θα είναι ίσο με το μισό της περιόδου. Αλλά για τις περιόδους έχουμε:

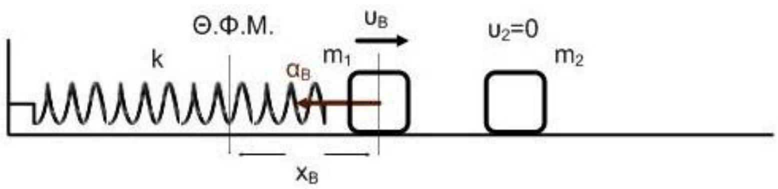
$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} \quad \text{και} \quad T_2=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Από όπου προκύπτει ότι $T_1 > T_2$, οπότε και $t_1 > t_2$ και σωστό είναι το γ).

ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ , ΕΛΑΤΗΡΙΑ ΚΑΙ Α.Α.Τ.

32) Οριζόντιο ελατήριο & ελαστική κρούση Ι

Στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k = 100 N / m είναι δεμένο σώμα μάζας m_1 που βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο . Μετακινούμε το σώμα από τη θέση φυσικού μήκους στη θέση Β, σε απόσταση x_B = 0,1 m κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου . Στην θέση Β η ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 έχει μέτρο $υ_B$ = √3 m / s και η επιτάχυνση του σώματος ισούται με $α_B$ = – 10 m / s^2 . Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θετική φορά την φορά προς τα δεξιά .

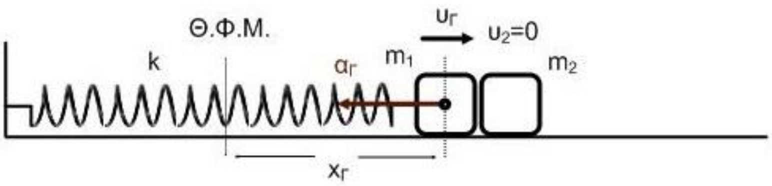


Α. Να βρείτε :

α. Τη μάζα m_1 του σώματος ,

β. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m_1 .

Β. Το σώμα μάζας m_1 φτάνει στη θέση Γ στην οποία η κινητική ενέργεια του σώματος ισούται με το 75 % της ενέργειας ταλάντωσης .



Να βρείτε στη θέση αυτή :

γ. Την απομάκρυνση της ταλάντωσης ,

δ. Την ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 .

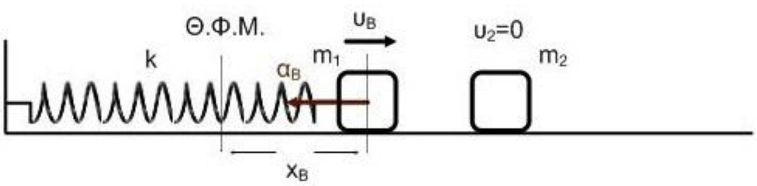
Γ. Στη θέση Γ έχουμε κεντρική και ελαστική κρούση του σώματος μάζας m_1 με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας m_2 = 1 kg .

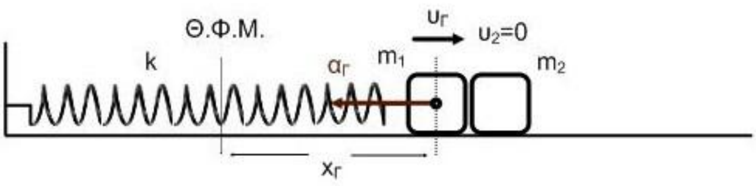
Να βρείτε :

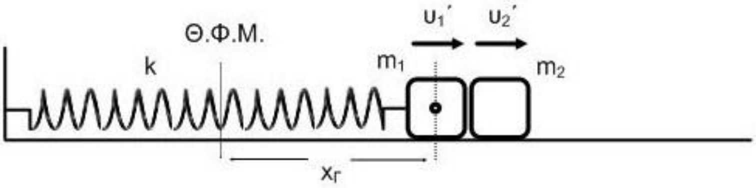
ε. Την ταχύτητα των σωμάτων μετά την κρούση ,

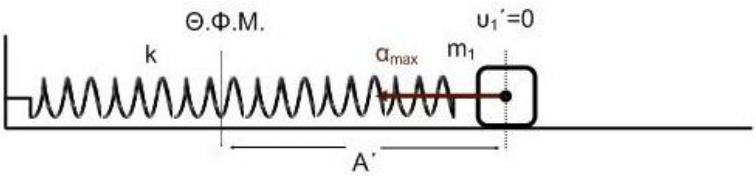
ζ. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m_1 μετά την κρούση .

Λύση









Α.

α.

Ισχύει :

$\alpha_B = -\,\omega^2 \cdot x_B \Rightarrow$

$\omega^2 = -\,(\alpha_B / x_B) \Rightarrow$

$\omega^2 = -\,(-\,10 / 0{,}1) \Rightarrow$

$\omega^2 = 100 \Rightarrow$

$\omega = \sqrt{100} \Rightarrow$

$\omega = 10$ rad / s .

Η σχέση ω και Τ :

$T = 2\cdot\pi / \omega \Rightarrow$

$T = 2\cdot\pi / 10 \Rightarrow$

$T = \pi / 5$ s .

Η περίοδος της ταλάντωσης :

$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(m_1 / k)} \Rightarrow$

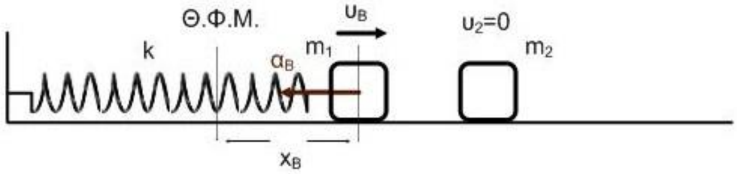
$T^2 = 4\cdot\pi^2\cdot(m_1 / k) \Rightarrow$

$m_1 = T^2\cdot k / (4\cdot\pi^2) \Rightarrow$

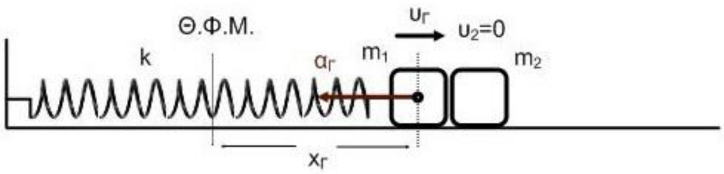
$m_1 = (\pi / 5)^2\cdot 100 / (4\cdot\pi^2) \Rightarrow$

$m_1 = 1$ kg .

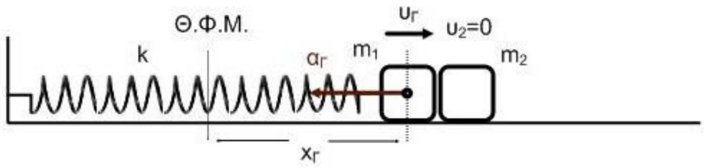
β.

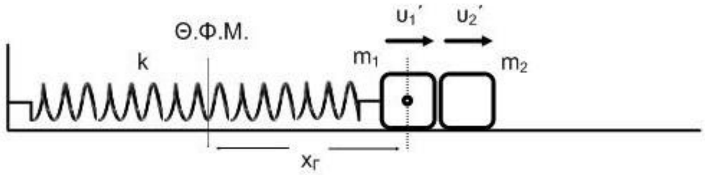


Η ολική ενέργεια διατηρείται στη θέση Β :
$E = K_B + U_B \Rightarrow$
$½\cdot k\cdot A^2 = ½\cdot m_1\cdot υ_B^2 + ½\cdot k\cdot x_B^2 \Rightarrow$
$k\cdot A^2 = m_1\cdot υ_B^2 + k\cdot x_B^2 \Rightarrow$
$A^2 = (m_1 / k)\cdot υ_B^2 + x_B^2 \Rightarrow$
$A = \sqrt{[(m_1 / k)\cdot υ_B^2 + x_B^2]} \Rightarrow$
$A = \sqrt{[(1 / 100)\cdot(\sqrt{3})^2 + 0{,}1^2]} \Rightarrow$
$A = 0{,}2$ m .
Β.
γ.
Στη θέση Γ στην οποία η κινητική ενέργεια του σώματος ισούται με το 75 % της ενέργειας ταλάντωσης .



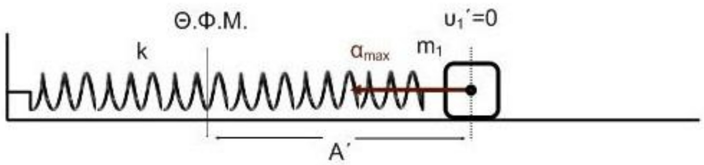
Η ολική ενέργεια διατηρείται στη θέση Γ :
$E = K_Γ + U_Γ \Rightarrow$
$E = (75 / 100)\cdot E + U_Γ \Rightarrow$
$U_Γ = E – (3 / 4)\cdot E \Rightarrow$
$U_Γ = (1 / 4)\cdot E \Rightarrow$
$½\cdot k\cdot x_Γ^2 = (1 / 4)\cdot½\cdot k\cdot A^2 \Rightarrow$
$x_Γ^2 = (1 / 4)\cdot A^2 \Rightarrow$
$x_Γ = \pm A / 2 \Rightarrow$
$x_Γ = \pm 0{,}2 / 2 \Rightarrow$
$x_Γ = \pm 0{,}1$ m ,
δεκτή η τιμή $x_Γ = + 0{,}1$ m .
δ.
Η ταχύτητα στη θέση Γ , δίνεται :
$υ_Γ = \pm ω\cdot\sqrt{(A^2 – x_Γ^2)} \Rightarrow$
$υ_Γ = \pm 10\cdot\sqrt{(0{,}2^2 – 0{,}1^2)} \Rightarrow$
$υ_Γ = \pm 10\cdot0{,}1\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$
$υ_Γ = \pm \sqrt{3}$ m / s ,
δεκτή η τιμή $υ_Γ = + \sqrt{3}$ m / s .
Γ.
ε.
Στη θέση Γ έχουμε κεντρική και ελαστική κρούση του σώματος μάζας m_1 με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 1$ kg .





Οι μάζες των m_1 και m_2 είναι ίσες , άρα θα έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων .
Στο παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να φτάσουμε με την εφαρμογή των σχέσεων :
$υ_1΄ = [(m_1 – m_2) / (m_1 + m_2)]\cdot υ_1$,
και
$υ_2΄ = [(2\cdot m_1) / (m_1 + m_2)]\cdot υ_1$,
θα πάρουμε $υ_1΄ = 0$ και $υ_2΄ = υ_1$.

ζ.



Η ενέργεια διατηρείται :

$E = K_Γ' + U_Γ' \Rightarrow$

αλλά $υ_1' = 0$, άρα $K_Γ' = 0$,

$E = U_Γ' \Rightarrow$

$½·k·A'^2 = ½·k·x_Γ^2 \Rightarrow$

$A'^2 = x_Γ^2 \Rightarrow$

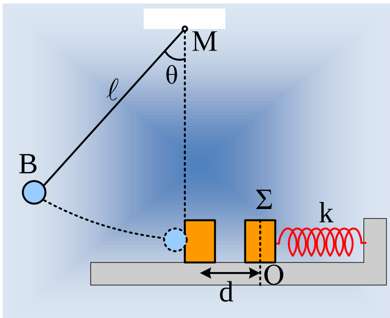
$A' = \pm x_Γ \Rightarrow$

$A' = \pm 0{,}1$ m ,

δεκτή η τιμή $A' = 0{,}1$ m .

33)

Ένα σώμα Σ μάζας M=3kg ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς k=375N/m, γύρω από μια θέση ισορροπίας O, όπως στο σχήμα, έχοντας ενέργεια ταλάντωσης E_1=7,5J. Μια σφαίρα μάζας m=1kg είναι δεμένη στο άκρο νήματος μήκους l=2m, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο στο σημείο M. Η σφαίρα συγκρατείται στη θέση B, με το νήμα να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ, όπου συνθ=0,6. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη τη σφαίρα να κινηθεί και αυτή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ, τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο και το Σ απέχει κατά d, από τη θέση ισορροπίας του. Μετά την κρούση η σφαίρα επιστρέφει μέχρι τη θέση που το νήμα να σχηματίσει με την κατακόρυφο γωνία φ, όπου συνφ=0,9.



Να υπολογιστούν:

i) Οι ταχύτητες της σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση και αμέσως μετά από αυτήν.

ii) Οι αντίστοιχες ταχύτητες του σώματος Σ.

iii) Η απόσταση d της θέσης κρούσης, από τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ.

iv) Η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Σ, μετά την κρούση.

Απάντηση:

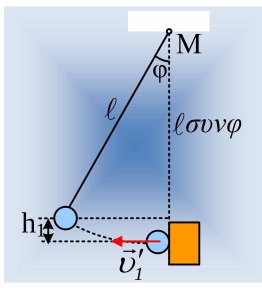
i) Έστω ότι τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο (ελάχιστα πριν την κρούση), η σφαίρα έχει ταχύτητα $υ_1$, όπως στο σχήμα, έχοντας κατέλθει κατά h, όπου $h = \ell - \ell συνθ = \ell(1 - συνθ)$.Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την πιο χαμηλή θέση, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας και εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε, για την κίνηση της σφαίρας:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mυ_1^2 \quad (1) \rightarrow$$

$$υ_1 = \sqrt{2g\ell(1 - συνθ)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2(1 - 0{,}6)}\, m/s = 4\, m/s$$

Εξάλλου αν $υ_1'$ το μέτρο της ταχύτητας αμέσως μετά την κρούση και h_1 το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η σφαίρα, με την ίδια λογική, όπως παραπάνω, θα έχουμε για το μέτρο της ταχύτητας $υ_2$ από την (1):



$$mgh_1 = \frac{1}{2}mυ_1'^2 \quad \rightarrow$$

$$\upsilon_1' = \sqrt{2g\ell\left(1\text{-}\sigma\upsilon\nu\varphi\right)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 2\left(1-0{,}9\right)}m/s = 2m/s$$

ii) Για την ελαστική κρούση μεταξύ της σφαίρας και του σώματος Σ ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 + \frac{2M}{m+M}\upsilon_2 \quad (2) \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 + \frac{M-m}{m+M}\upsilon_2 \quad (3)$$

όπου υ_2 η ταχύτητα πριν την κρούση του σώματος Σ.

Λύνουμε την (2) ως προς υ_2 και με αντικατάσταση (θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, οπότε υ'_1=-2m/s), βρίσκουμε:

$$\upsilon_2 = \frac{m+M}{2M}\upsilon_1' - \frac{m-M}{2M}\upsilon_1 = \frac{1+3}{2\cdot 3}(-2)m/s - \frac{(1-3)4}{2\cdot 3}m/s = 0$$

Δηλαδή ελάχιστα πριν τη στιγμή της κρούσης, το σώμα Σ έχει μηδενική ταχύτητα, βρίσκεται δηλαδή στην αριστερή ακραία θέση της ταλάντωσής του. Αλλά τότε με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 1}{1+3}4m/s = 2m/s$$

iii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα $d=A_1$ όπου A_1 το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης του σώματος Σ. Αλλά από την ενέργεια ταλάντωσης έχουμε:

$$E_{\tau,1} = \frac{1}{2}DA_1^2 \rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E_{\tau,1}}{D}} = \sqrt{\frac{2E_{\tau,1}}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 7{,}5}{375}}m = 0{,}2m$$

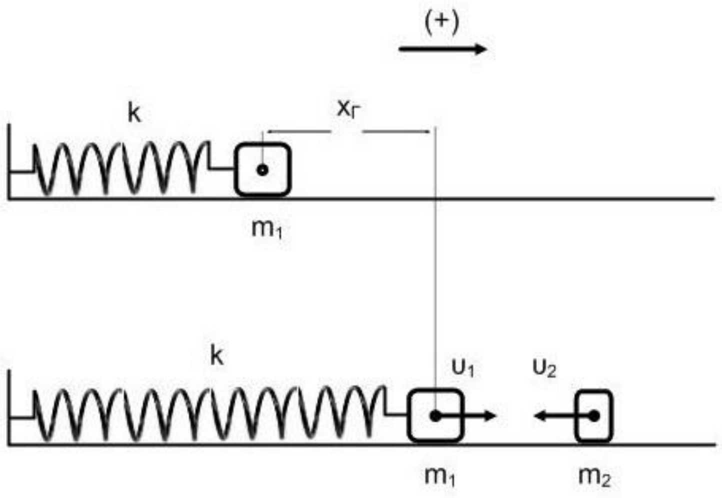
Άρα και η ζητούμενη απόσταση είναι d=0,2m.

iv) Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_2=-A_1=-0{,}2$m (θεωρούμε θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση) έχοντας ταχύτητα υ_2'=2m/s, ξεκινώντας μια νέα ταλάντωση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας Ο. Από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε για το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας που πρόκειται να αποκτήσει το σώμα Σ::

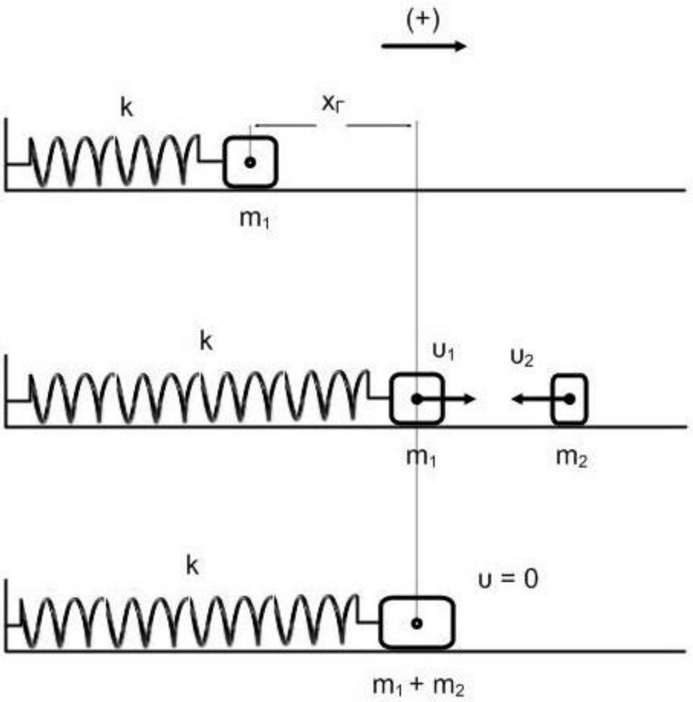
$$E_{\tau,2} = \frac{1}{2}DA_2^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2'^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\upsilon_2'^2 + \frac{k}{M}x_2^2} = \sqrt{2^2 + \frac{375}{3}0{,}2^2}m/s = 3m/s$$

34) Σώμα μάζας m_1 = 1,5 kg είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k . Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με πλάτος A = 0,5 m και συχνότητα f = 50 / π Hz .
α. Να βρεθεί η θέση Γ (το $x_Γ > 0$) όπου U = (16 / 9)·K .
β. Το σώμα m_1 ταλαντώνεται . Στη θέση Γ ένα βλήμα μάζας m_2 = 0,5 kg με ταχύτητα $υ_2$,που κινείται στην ίδια διεύθυνση (με το m_1) με αντίθετη φορά , συγκρούεται πλαστικά με το m_1 . Δημιουργείται συσσωμάτωμα που ακινητοποιείται στιγμιαία αμέσως μετά την κρούση. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_2 .



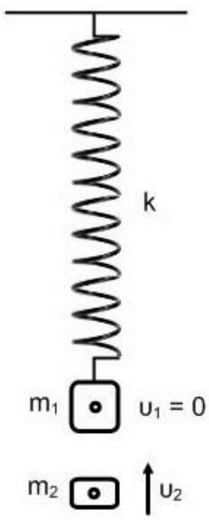
γ. Να βρεθεί το πηλίκο των μέγιστων τιμών των δυνάμεων επαναφοράς της ταλάντωσης του συσσωματώματος και του σώματος μάζας m_1 .
Λύση
α.
Δίνεται :
U = (16 / 9)·K ⇒ K = (9 / 16)·U .
Αρχή διατήρησης της ενέργειας στις ταλαντώσεις :
E = K + U ⇒
E = (9 / 16)·U + U ⇒
E = (25 / 16)·U ⇒
U = (16 / 25)·E ⇒
$½·D·x_Γ^2 = (16 / 25)·½·D·A^2$ ⇒
$x_Γ^2 = (16 / 25)·A^2$ ⇒
$x_Γ = ± (4 / 5)·A$.
Δίνεται $x_Γ > 0$, άρα $x_Γ = 0,8·A$ ⇒
$x_Γ = 0,8·0,5$ ⇒
$x_Γ = 0,4$ m .
β.
Η σχέση της περιόδου και της συχνότητας :
T = 1 / f ⇒
T = 1 / (50 / π) ⇒
T = π / 50 s .
Η κυκλική συχνότητα :
ω = 2·π / T ⇒
ω = 2·π / (π / 50) ⇒
ω = 100 rad / s .
Η ταχύτητα του σώματος m_1 στη θέση $x_Γ$:
(Η σχέση αποδεικνύεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας : $E = K_1 + U_1$)
$υ_1 = ± ω·\sqrt{A^2 – x_Γ^2}$ ⇒
$υ_1 = ± 100·\sqrt{0,5^2 – 0,4^2}$ ⇒
$υ_1 = ± 100·\sqrt{0,25 – 0,16}$ ⇒
$υ_1 = ± 100·\sqrt{0,09}$ ⇒
$υ_1 = ± 100·0,3$ ⇒
$υ_1 = ± 30$ m / s .
Η $υ_1 > 0$, άρα $υ_1 = 30$ m / s .
Έχουμε πλαστική κρούση μεταξύ των m_1 και m_2 , άρα ισχύει η :



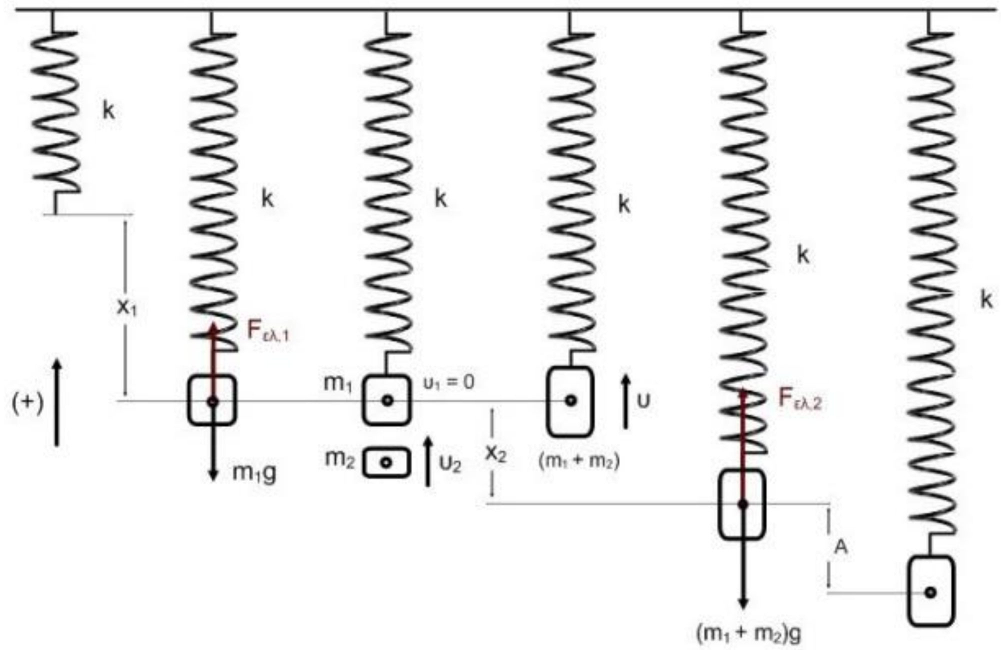
Αρχή διατήρησης της ορμής :
(διανυσματική σχέση που ισχύει στο μονωμένο σύστημα των m_1 και m_2)
$P_{ολ,πριν} = P_{ολ,μετά} \Rightarrow$
$m_1 \cdot υ_1 - m_2 \cdot υ_2 = (m_1 + m_2) \cdot υ \Rightarrow$
$m_1 \cdot υ_1 - m_2 \cdot υ_2 = (m_1 + m_2) \cdot 0 \Rightarrow$
$m_2 \cdot υ_2 = m_1 \cdot υ_1 \Rightarrow$
$υ_2 = m_1 \cdot υ_1 / m_2 \Rightarrow$
$υ_2 = 1{,}5 \cdot 30 / 0{,}5 \Rightarrow$
$υ_2 = 90$ m / s .

γ.
Στη θέση $x = x_Γ$, το συσσωμάτωμα είναι στιγμιαία ακίνητο , άρα το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης του .
Δηλαδή το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A' = x_Γ = 0{,}4$ m .
Το ζητούμενο πηλίκο :
$ΣF_{max}' / ΣF_{max} = k \cdot A' / (k \cdot A) \Rightarrow$
$ΣF_{max}' / ΣF_{max} = A' / A \Rightarrow$
$ΣF_{max}' / ΣF_{max} = 0{,}4 / 0{,}5 \Rightarrow$
$ΣF_{max}' / ΣF_{max} = 4 / 5 \Rightarrow$
$ΣF_{max}' / ΣF_{max} = 0{,}8$.

35) Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k = 200 N / m έχει το πάνω άκρο του δεμένο και στο κάτω άκρο του δένεται σώμα μάζας m_1 = 1,6 kg . Το σώμα m_1 ισορροπεί .
α. Να υπολογιστεί η περίοδος και η επιμήκυνση του ελατηρίου από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου .
Δεύτερο σώμα μάζας m_2 = 0,4 kg κινείται κατακόρυφα με ταχύτητα $υ_2$ = 15 m / s προς τα πάνω κατά την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_1 . Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση .

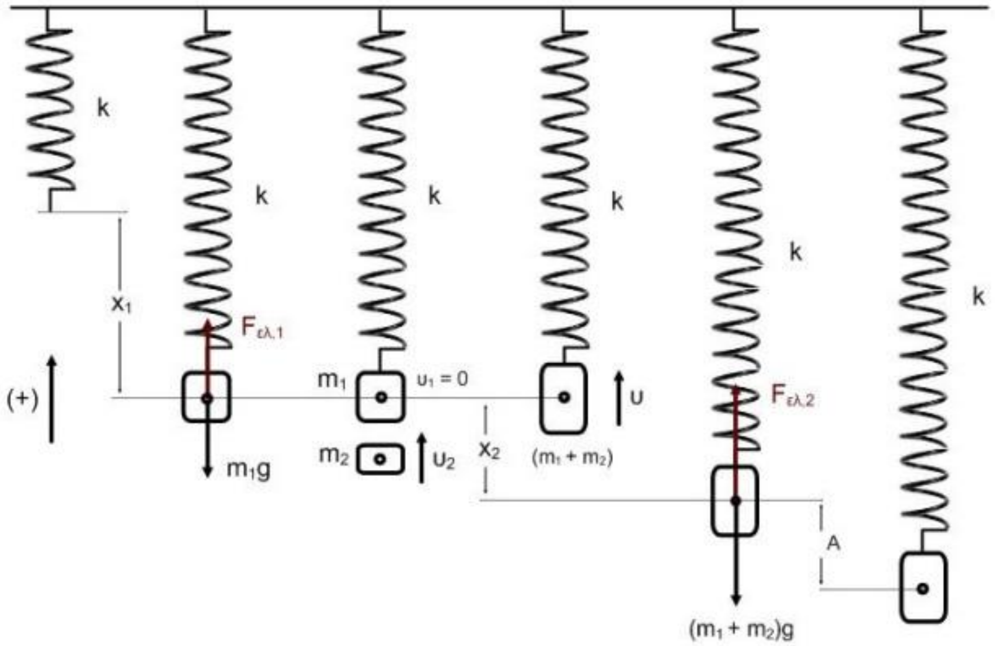


β. Να βρεθεί η περίοδος και το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος .
γ. Να βρεθεί στη θέση της μέγιστης απομάκρυνσης (x = – A) του συσσωματώματος ο λόγος της δύναμης του ελατηρίου προς την συνισταμένη δύναμη ταλάντωσης .
Θεωρήστε θετική φορά την φορά προς τα πάνω . Δίνεται $g = 10\ m / s^2$ και $\sqrt{904} \cong 30$.
Λύση
α.
Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος m_1 :
$T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(m_1 / k)} \Rightarrow$
$T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(1,6 / 200)} \Rightarrow$
$T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{[(16\cdot10^{-1}) / (20\cdot10^{1})]} \Rightarrow$
$T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{[(4 / 5)\cdot10^{-2}]} \Rightarrow$
$T_1 = 4\cdot\pi\cdot10^{-1} / \sqrt{5} \Rightarrow$
$T_1 = 0,4\cdot\pi\cdot\sqrt{5} / 5\ s$.
Το σώμα m_1 ισορροπεί :
(στο παρακάτω σχήμα από αριστερά προς τα δεξιά , η πρώτη θέση είναι η θέση φυσικού μήκους και η δεύτερη είναι η θέση ισορροπίας του σώματος m_1)



$\Sigma F_{y,1} = 0 \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda,1} – m_1\cdot g = 0 \Rightarrow$
$k\cdot x_1 – m_1\cdot g = 0$ … (1) $\Rightarrow$
$k\cdot x_1 = m_1\cdot g \Rightarrow$
$x_1 = m_1\cdot g / k \Rightarrow$
$x_1 = 1,6\cdot10 / 200 \Rightarrow$
$x_1 = 0,08\ m$.
β.
Η περίοδος ταλάντωσης του συσσωματώματος :
$T' = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{[(m_1 + m_2) / k]} \Rightarrow$
$T' = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{[(1,6 + 0,4) / 200]} \Rightarrow$
$T' = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(2 / 200)} \Rightarrow$
$T' = 2\cdot\pi / 10 \Rightarrow$
$T' = \pi / 5\ s$.
Το σώμα m_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_1 , άρα ισχύει :
Αρχή διατήρησης της ορμής :
(διανυσματική σχέση που ισχύει σε μονωμένο σύστημα σωμάτων και εφαρμόζεται στο παραπάνω σχήμα , από αριστερά προς τα δεξιά στο τρίτο και τέταρτο σχήμα)
$P_{ολ,πριν} = P_{ολ,μετά} \Rightarrow$
$0 + m_2\cdot\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\cdot\upsilon \Rightarrow$
$\upsilon = m_2\cdot\upsilon_2 / (m_1 + m_2) \Rightarrow$
$\upsilon = 0,4\cdot15 / (1,6 + 0,4) \Rightarrow$
$\upsilon = 6 / 2 \Rightarrow$
$\upsilon = 3\ m / s$.
Το συσσωμάτωμα ισορροπεί , στη νέα θέση ισορροπίας, στο παραπάνω σχήμα από αριστερά προς τα δεξιά στο πέμπτο σχήμα :
$\Sigma F_{y,2} = 0 \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda,2} – (m_1 + m_2)\cdot g = 0 \Rightarrow$

$k\cdot(x_1 + x_2) – (m_1 + m_2)\cdot g = 0 \Rightarrow$
$k\cdot x_1 + k\cdot x_2 – m_1\cdot g – m_2\cdot g = 0 \Rightarrow$
με την βοήθεια της σχέσης (1) ,
$k\cdot x_2 – m_2\cdot g = 0 \Rightarrow$
$x_2 = m_2\cdot g / k \Rightarrow$
$x_2 = 0{,}4\cdot 10 / 200 \Rightarrow$
$x_2 = 4 / 200 \Rightarrow$
$x_2 = 1 / 50 \Rightarrow$
$x_2 = 0{,}02$ m .
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στις ταλαντώσεις , στο παρακάτω σχήμα από αριστερά προς τα δεξιά στο τέταρτο και έκτο σχήμα :

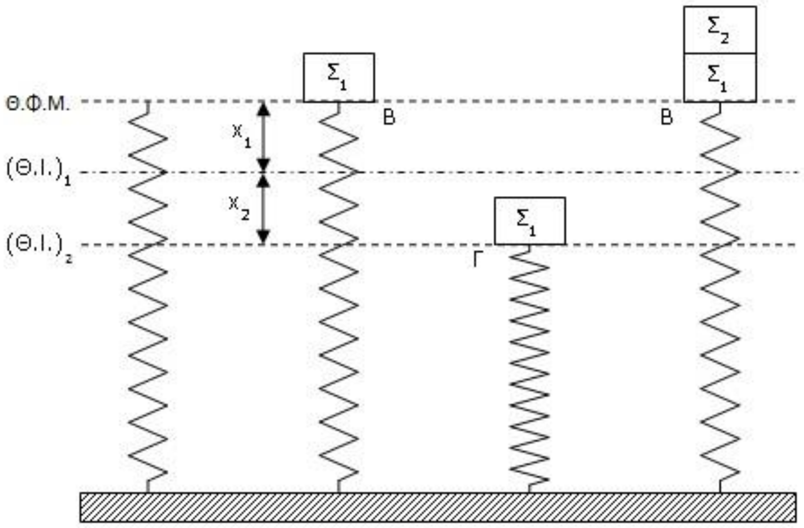


$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow$
$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$
$½\cdot(m_1 + m_2)\cdot υ^2 + ½\cdot k\cdot x_2{}^2 = 0 + ½\cdot k\cdot A^2 \Rightarrow$
$(m_1 + m_2)\cdot υ^2 + k\cdot x_2{}^2 = k\cdot A^2 \Rightarrow$
$A^2 = [(m_1 + m_2)\cdot υ^2 + k\cdot x_2{}^2] / k \Rightarrow$
$A = \sqrt{[(m_1 + m_2)\cdot υ^2 / k] + x_2{}^2} \Rightarrow$
$A = \sqrt{[(1{,}6 + 0{,}4)\cdot 3^2 / 200] + 0{,}02^2} \Rightarrow$
$A = \sqrt{(18 / 200) + 4\cdot 10^{-4}} \Rightarrow$
$A = \sqrt{9\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-4}} \Rightarrow$
$A = \sqrt{900\cdot 10^{-4} + 4\cdot 10^{-4}} \Rightarrow$
$A = \sqrt{904\cdot 10^{-4}} \Rightarrow$
$A = 30\cdot 10^{-2} \Rightarrow$
$A = 0{,}3$ m .
γ.
Στο παραπάνω σχήμα , από αριστερά προς τα δεξιά στο έκτο και τελευταίο σχήμα :
$F_{ελ,-A} / ΣF_{-A} = [k\cdot(x_1 + x_2 + A)] / (k\cdot A) \Rightarrow$
$F_{ελ,-A} / ΣF_{-A} = (x_1 + x_2 + A) / A \Rightarrow$
$F_{ελ,-A} / ΣF_{-A} = (0{,}08 + 0{,}02 + 0{,}3) / 0{,}3 \Rightarrow$
$F_{ελ,-A} / ΣF_{-A} = 0{,}4 / 0{,}3 \Rightarrow$
$F_{ελ,-A} / ΣF_{-A} = 4 / 3$.

36) Ένα κατακόρυφο ελατήριο, σταθεράς $k = 1000\ N / m$, έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ στο πάνω άκρο του είναι δεμένο σώμα $Σ_1$ μάζας $m = 10\ kg$. Αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα ελατήριο – σώμα $Σ_1$ να ταλαντωθεί, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του και το σώμα $Σ_1$ βρίσκεται στη θέση Β.

Α. Να υπολογίσετε:
α. το πλάτος $Α_1$ της ταλάντωσης,
β. τη μέγιστη ταχύτητα $υ_{1\,(max)}$ του σώματος $Σ_1$.
Β. Στη θέση Β το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται πλαστικά με όμοιο σώμα $Σ_2$ που έχει ταχύτητα λίγο πριν την κρούση μέτρου ίσου με τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ [$υ_{1\,(max)}$] και φορά προς τα κάτω.
γ. Να προσδιορίσετε τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
δ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα $υ$ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
ε. Να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος ελατήριο – συσσωμάτωμα.
Δίνεται: $g = 10\ m / s^2$.

Λύση
Α.
α.

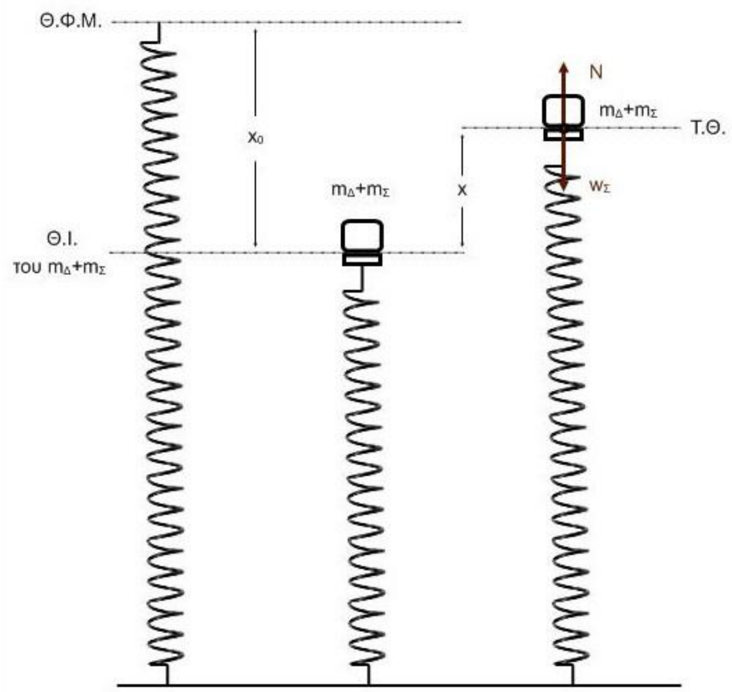


Η θέση φυσικού μήκους είναι η άνω ακραία θέση
Στη $(Θ.Ι.)_1$:
$ΣF_1 = 0 \Rightarrow$
$F_{1,ελ} – m_1 \cdot g = 0 \Rightarrow$
$F_{1,ελ} = m_1 \cdot g \Rightarrow$
$k \cdot x_1 = m_1 \cdot g \Rightarrow$
$m_1 = m$,
$k \cdot x_1 = m \cdot g \Rightarrow$
$x_1 = m \cdot g / k \Rightarrow$
$x_1 = 10 \cdot 10 / 1000 \Rightarrow$
$x_1 = 0{,}1\ m$.
β.
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης :
$υ_{1,max} = ω_1 \cdot A_1 \Rightarrow$
$υ_{1,max} = [\sqrt{(k / m)}] \cdot A_1 \Rightarrow$
$υ_{1,max} = [\sqrt{(1000 / 100)}] \cdot 0{,}1 \Rightarrow$
$υ_{1,max} = 10 \cdot 0{,}1 \Rightarrow$
$υ_{1,max} = 1\ m / s$.

Β.
γ.
Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι x_2 κάτω από την $(Θ.Ι.)_1$.
Από την συνθήκη ισορροπίας στη $(Θ.Ι.)_2$ ισχύει :
$ΣF_2 = 0 \Rightarrow$
$F_{2,ελ} – (m_1 + m_2)·g = 0 \Rightarrow$
$F_{2,ελ} = (m_1 + m_2)·g \Rightarrow$
$k·(x_1 + x_2) = (m_1 + m_2)·g \Rightarrow$
$m_1 = m_2 = m$,
$k·x_1 + k·x_2 = m·g + m·g \Rightarrow$
$k·x_2 = 2·m·g – k·x_1 \Rightarrow$
$x_2 = (2·m·g – k·x_1) / k \Rightarrow$
$x_2 = (2·10·10 – 1000·0,1) / 1000 \Rightarrow$
$x_2 = 0,1$ m .
δ.
Η κρούση γίνεται στη θέση Β όπου το $Σ_1$ έχει ταχύτητα μηδέν .
Εφαρμόζω την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση :
$m_1·υ_1 + m_2·υ_2 = (m_1 + m_2)·υ \Rightarrow$
Η κρούση γίνεται στη θέση Β όπου το $Σ_1$ έχει ταχύτητα μηδέν $υ_1 = 0$,
$m·υ_2 = 2·m·υ \Rightarrow$
$υ = υ_2 / 2 \Rightarrow$
$υ = 1 / 2 \Rightarrow$
$υ = 0,5$ m / s .
ε.
Η ολική μηχανική ενέργεια Ε :
υπολογίζεται για το συσσωμάτωμα στη θέση που αυτό σχηματίζεται ,
$E = U + K \Rightarrow$
$E = ½·k·(x_1 + x_2)^2 + ½·(m_1 + m_2)·υ^2 \Rightarrow$
$E = ½·1000·(0,1 + 0,1)^2 + ½·(2·10)·0,5^2 \Rightarrow$
$E = 20 + 2,5 \Rightarrow$
$E = 22,5$ J .

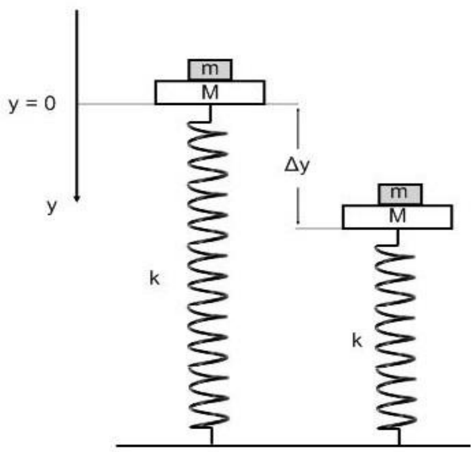
37) Πάνω στο δίσκο Δ μάζας 0,1 kg που φαίνεται στην εικόνα έχει τοποθετηθεί σώμα Σ μάζας 0,3 kg . Ο δίσκος είναι δεμένος στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς 40 N / m .

Να βρείτε τη μέγιστη τιμή A_{max} του πλάτους της απλής αρμονικής ταλάντωσης που μπορεί να εκτελεί ο δίσκος χωρίς να χάνει το σώμα Σ την επαφή του μ΄αυτόν .
Δίνεται $g = 10$ m / s² .
Λύση
1ος τρόπος
Όταν το σώμα βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας του , το σώμα Σ δεν χάνει την επαφή του με τον δίσκο όταν $N \geq 0$.



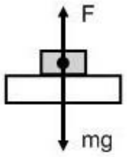
Επειδή όμως το σώμα εκτελεί και απλή αρμονική ταλάντωση ισχύει ταυτόχρονα :
(2ος νόμος του Νεύτωνα $ΣF_y = – m_Σ·α$ και $α = – ω^2·x$, με θετική φορά προς τα κάτω)
$w_Σ – N = m_Σ·ω^2·x \Rightarrow$
$N = m_Σ·g – m_Σ·ω^2·x$.
Άρα αφού $N \geq 0$:
$m_Σ·g – m_Σ·ω^2·x \geq 0 \Rightarrow$
$x \leq g / ω^2$, για κάθε τιμή του x .
Συνεπώς ισχύει και για το πλάτος :
$A \leq g / ω^2$, απ΄όπου προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή του είναι :
$A_{max} = g / ω^2$,
και επειδή $ω = \sqrt{k / m_{ολ}}$, θα έχουμε τελικά :
$A_{max} = m_{ολ}·g / k \Rightarrow$
$A_{max} = (m_Δ + m_Σ)·g / k \Rightarrow$
$A_{max} = (0{,}1 + 0{,}3)·10 / 40 \Rightarrow$
$A_{max} = 0{,}1$ m .
(Σχόλιο : Κάτω από τη θέση ισορροπίας η Ν είναι πάντα διάφορη του μηδενός και συνεπώς δε χάνεται η επαφή του σώματος με τον δίσκο .)

38)Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 200 N / m είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο . Στο άλλο άκρο του είναι σταθερά συνδεδεμένο σώμα μάζας M = 1,5 kg . Πάνω στο σώμα μάζας M είναι τοποθετημένο σώμα μάζας m = 0,5 kg .

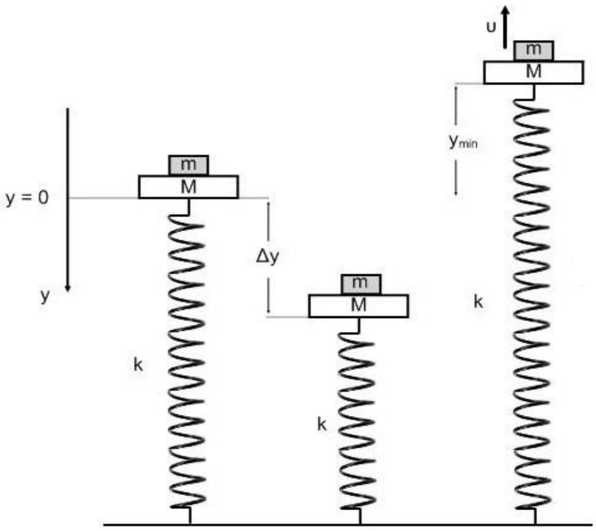


Το σύστημα ισορροπεί . Πιέζουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $Δy = (\sqrt{5} / 10)$ m και το αφήνουμε ελεύθερο .

α. Να δείξετε ότι το σώμα μάζας m θα εγκαταλείψει το σώμα μάζας M .
β. Ποια είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος μάζας m τη στιγμή που εγκαταλείπει το δίσκο ;
γ. Σε πόσο ύψος θα φτάσει το σώμα μάζας m πάνω από τη θέση στην οποία εγκαταλείπει το δίσκο ;
Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g = 10\ m / s^2$.
Λύση
Η περίοδος της ταλάντωσης των σωμάτων m + M δίνεται :
$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(m + M) / k} \Rightarrow$
$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(0,5 + 1,5) / 200} \Rightarrow$
$T = 2\cdot\pi / 10 \Rightarrow$
$T = \pi / 5\ s$.
Η κυκλική συχνότητα των σωμάτων m + M :
$\omega = 2\cdot\pi / T \Rightarrow$
$\omega = 2\cdot\pi / (\pi / 5) \Rightarrow$
$\omega = 10\ rad / s$.

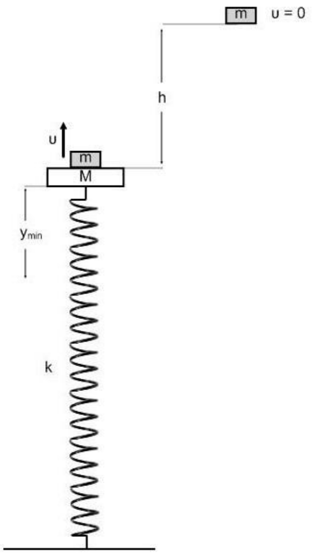


Στο σώμα μάζας m ασκούνται η δύναμη F από το σώμα μάζας M και το βάρος του m·g .
Η συνισταμένη δύναμη ταλάντωσης στο σώμα μάζας m :
$\Sigma F_y = - D\cdot y \Rightarrow$
$m\cdot g - F = - m\cdot\omega^2\cdot y \Rightarrow$
$F = m\cdot g + m\cdot\omega^2\cdot y \Rightarrow$
$F = m\cdot(g + \omega^2\cdot y)$.
Για να είναι το σώμα μάζας m σε επαφή με το σώμα μάζας M , πρέπει :
$F \geq 0 \Rightarrow$
$m > 0$,
$g + \omega^2\cdot y \geq 0 \Rightarrow$
$y \geq - g / \omega^2 \Rightarrow$
$y \geq - 10 / 100 \Rightarrow$
$y \geq - 0,1\ m$.



Για την τιμή $y_{min} = - 0,1\ m$, το σώμα μάζας m θα εγκαταλείψει το σώμα μάζας M .
Δίνεται $\Delta y = (\sqrt{5} / 10) \cong 0,223\ m$.
Αφού $y_{min} > - \Delta y$ το σώμα m θα εγκαταλείψει το σώμα M , στη θέση $y_{min} = - 0,1\ m$, κινούμενο προς τα πάνω , δηλαδή με $υ < 0$.
β.
Το πλάτος της ταλάντωσης $A = \Delta y = \sqrt{5} / 10\ m$.
Στη θέση που το σώμα m εγκαταλείπει το σώμα M , η ταχύτητα είναι :
$υ = \pm\ \omega\cdot\sqrt{A^2 - y_{min}^2} \Rightarrow$
$υ = \pm\ 10\cdot\sqrt{(\sqrt{5} / 10)^2 - 0,1^2} \Rightarrow$
$υ = \pm\ 10\cdot\sqrt{0,05 - 0,01} \Rightarrow$
$υ = \pm\ 2\ m / s$, δεκτή η τιμή $υ = - 2\ m / s$.
Στη θέση που το σώμα m εγκαταλείπει το σώμα M , η επιτάχυνση είναι :
$\alpha = - \omega^2\cdot y_{min} \Rightarrow$
$\alpha = - 10^2\cdot(- 0,1) \Rightarrow$
$\alpha = + 10\ m / s^2$.

γ.



Το σώμα μάζας m εγκαταλείπει το σώμα μάζας M και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω φτάνοντας σε ύψος h , όπου η ταχύτητα του στιγμιαία μηδενίζεται .

Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σώμα μάζας m , με αρχική θέση την θέση εγκατάλειψης και τελική θέση την θέση του μέγιστου ύψους :

(θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας την θέση όπου το σώμα μάζας m αποχωρίζεται από το σώμα μάζας M , την θέση $y = y_{min}$)

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow$

$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$

$½·m·υ^2 + 0 = 0 + m·g·h \Rightarrow$

$h = υ^2 / (2·g) \Rightarrow h = (-2)^2 / (2·10) \Rightarrow h = 0,2$ m .

39) Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k = 100 N / m έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο σε οριζόντιο επίπεδο και στο πάνω άκρο του βρίσκεται δεμένη μια μικρή μεταλλική βάση μάζας M = 0,9 kg . Πάνω στη βάση κάθεται ένα κολιμπρί μάζας 0,1 kg και το σύστημα ισορροπεί .

Δίνεται g = 10 m / s² , √0,0361 = 0,19 .

Να υπολογιστούν :

α. Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος μεταλλικής βάσης – κολιμπρί .

Κάποια χρονική στιγμή το κολιμπρί πετάει κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $υ_1$ = 18 m / s .

Αν θεωρήσουμε ότι το κολιμπρί σπρώχνει με τα πόδια του την μεταλλική βάση και αποχωρίζεται από αυτήν χωρίς να χρησιμοποιήσει τα φτερά του , να βρεθεί :

β. Η ταχύτητα που αποκτά η μεταλλική βάση μετά το πέταγμα του κολιμπρί ,

γ. Η νέα θέση ισορροπίας της μεταλλικής βάσης ,

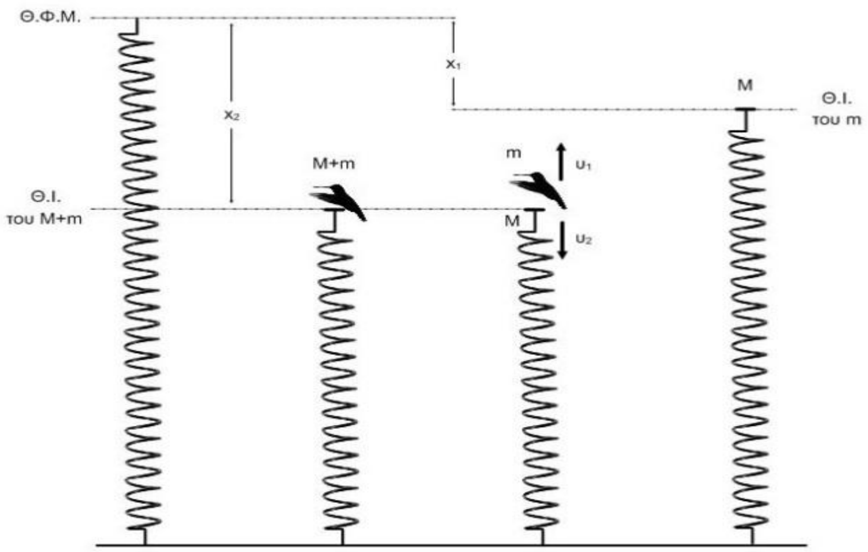
δ. Το πλάτος της ταλάντωσης της μεταλλικής βάσης .

Αν θεωρήσουμε ότι το κολιμπρί φεύγει από την μεταλλική βάση χρησιμοποιώντας μόνο τα φτερά του (άρα αλληλεπιδρά με τον αέρα και όχι με την μεταλλική βάση) , να βρεθεί :

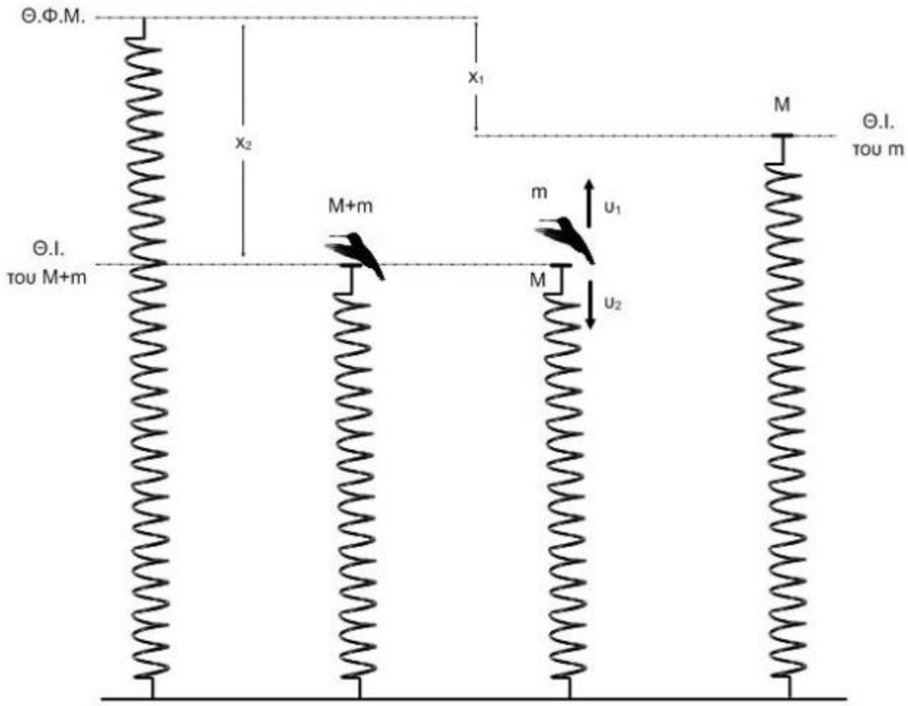
ε. Το πλάτος της ταλάντωσης της μεταλλικής βάσης .

Λύση

α.

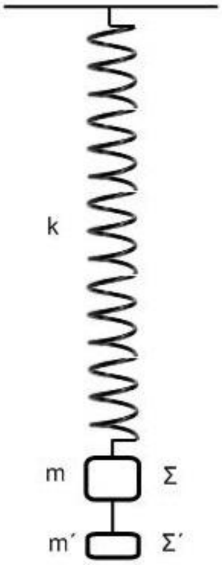


Η θέση ισορροπίας του συστήματος μεταλλικής βάσης – κολιμπρί :
$\Sigma F = 0 \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda} - (m + M)\cdot g = 0 \Rightarrow$
$k\cdot x_2 = (m + M)\cdot g \Rightarrow$
$x_2 = (m + M)\cdot g / k \Rightarrow$
$x_2 = (0,1 + 0,9)\cdot 10 / 100 \Rightarrow$
$x_2 = 0,1$ m .
β.
Ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής :
$P_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = P_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$
$0 = m\cdot\upsilon_1 - M\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$
$M\cdot\upsilon_2 = m\cdot\upsilon_1 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = m\cdot\upsilon_1 / M \Rightarrow$
$\upsilon_2 = 0,1\cdot 18 / 0,9 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = 2$ m / s .
γ.
$\Sigma F' = 0 \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda}' - M\cdot g = 0 \Rightarrow$
$k\cdot x_1 = M\cdot g \Rightarrow$
$x_1 = M\cdot g / k \Rightarrow$
$x_1 = 0,9\cdot 10 / 100 \Rightarrow$
$x_1 = 0,09$ m .
δ.



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας :
(για αρχική θέση την θέση αμέσως μετά την αποχώρηση του κολιμπρί και τελική θέση την θέση μέγιστου πλάτους)
$K + U = E \Rightarrow$
$\frac{1}{2}\cdot M\cdot\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}\cdot k\cdot(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2 \Rightarrow$
$M\cdot\upsilon_2^2 + k\cdot(x_2 - x_1)^2 = k\cdot A^2 \Rightarrow$
$A^2 = M\cdot\upsilon_2^2 + k\cdot(x_2 - x_1)^2 / k \Rightarrow$
$A = \sqrt{[(M\cdot\upsilon_2^2 / k) + (x_2 - x_1)^2]} \Rightarrow$
$A = \sqrt{[(0,9\cdot 2^2 / 100 + (0,1 - 0,09)^2]} \Rightarrow$
$A = \sqrt{[0,036 + 0,0001]} \Rightarrow$
$A = \sqrt{0,0361} \Rightarrow$
$A = 0,19$ m .
ε.
Όταν το κολιμπρί φεύγει από την βάση χρησιμοποιώντας μόνο τα φτερά του (δηλαδή αλληλεπιδρά με τον αέρα) , η βάση έχει ταχύτητα μηδέν , άρα η βάση θα βρίσκεται στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης :
$A = x_2 - x_1 \Rightarrow$
$A = 0,1 - 0,09 \Rightarrow$
$A = 0,01$ m .

40)



Το σώμα Σ μάζας m = 0,5 kg που φαίνεται στην εικόνα αρχικά ηρεμεί δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k = 50 N / m . Είναι δεμένο επίσης μέσω νήματος με σώμα Σ΄ μάζας m΄ = 1 kg .

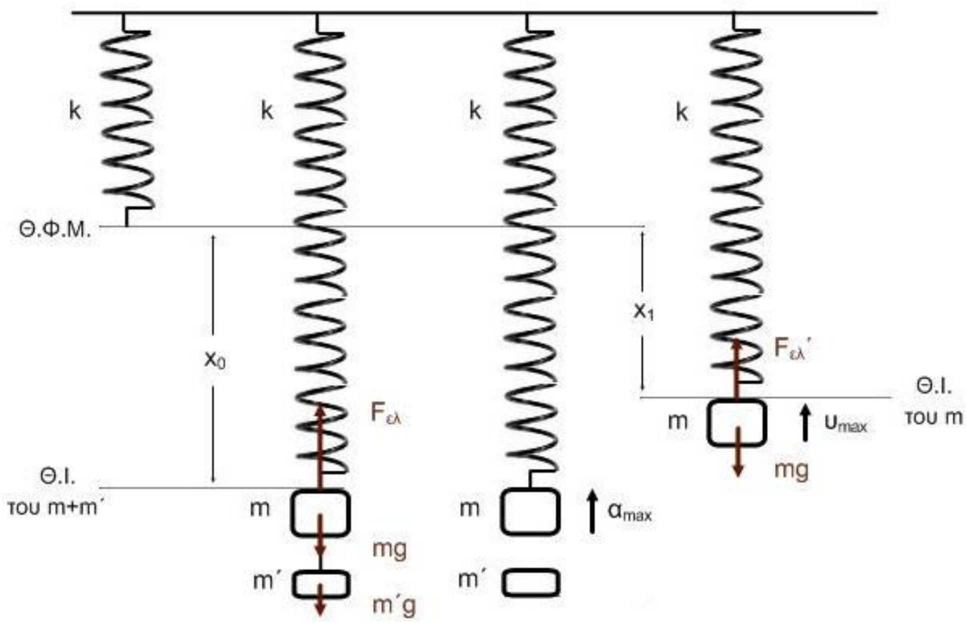
Αν το νήμα κοπεί να βρείτε :

α. Την περίοδο της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ ,

β. Την μέγιστη ταχύτητα του .

Δίνεται $g = 10\ m / s^2$.

Λύση



α.

Το νήμα που ενώνει το σώμα μάζας m με το σώμα μάζας m΄ κόβεται .

Το σώμα μάζας m παραμένει δεμένο στο άκρο ελατηρίου , άρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση .

Η περίοδος της ταλάντωσης του είναι :

$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(m / k)} \Rightarrow$

$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(0,5 / 50)} \Rightarrow$

$T = 2\cdot\pi / 10 \Rightarrow$

$T = \pi / 5$ s .

β.

Η γωνιακή συχνότητα ω :

$\omega = 2\cdot\pi / T \Rightarrow$

$\omega = 2\cdot\pi / (\pi / 5) \Rightarrow$

$\omega = 10$ rad / s .

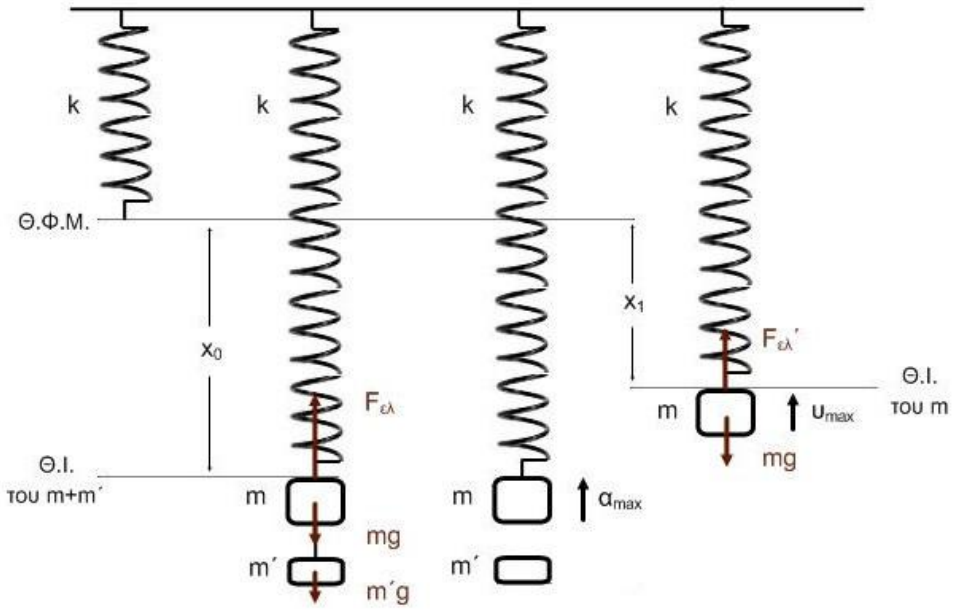
Η θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων m και m΄ , η x_0 :

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$F_{\varepsilon\lambda} - w_m - w_{m΄} = 0 \Rightarrow$

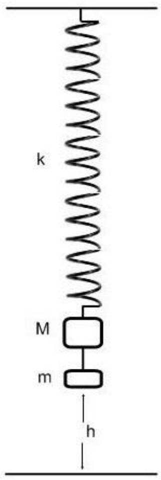
$k\cdot x_0 - m\cdot g - m΄\cdot g = 0 \Rightarrow$

$k \cdot x_0 = (m + m') \cdot g \Rightarrow$
$x_0 = (m + m') \cdot g / k \Rightarrow$
$x_0 = (0{,}5 + 1) \cdot 10 / 50 \Rightarrow$
$x_0 = 0{,}3$ m .

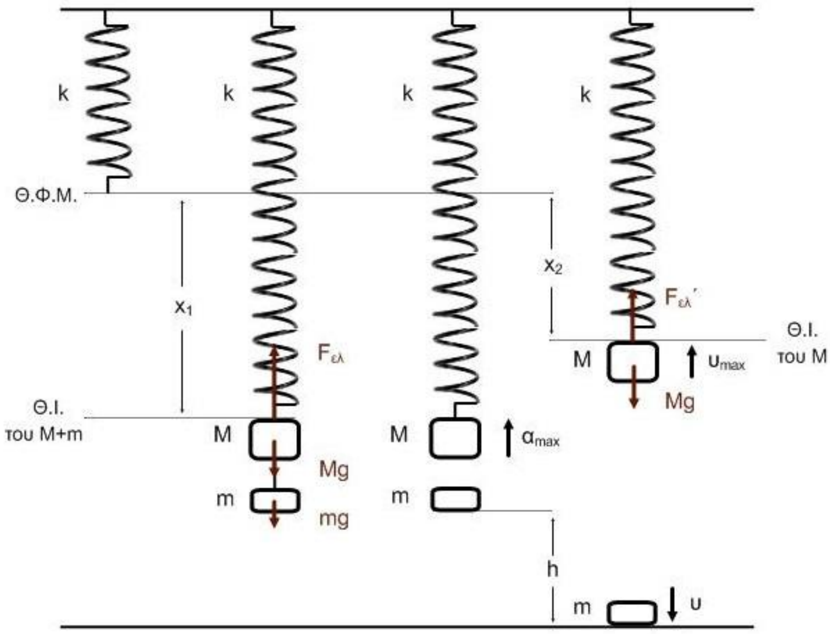


Η θέση ισορροπίας του σώματος m , η x_1 :
$\Sigma F_y' = 0 \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda}' - w_m = 0 \Rightarrow$
$k \cdot x_1 - m \cdot g = 0 \Rightarrow$
$k \cdot x_1 = m \cdot g \Rightarrow$
$x_1 = m \cdot g / k \Rightarrow$
$x_1 = 0{,}5 \cdot 10 / 50 \Rightarrow$
$x_2 = 0{,}1$ m .
Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m , είναι :
$A = x_0 - x_1 \Rightarrow$
$A = 0{,}3 - 0{,}1 \Rightarrow$
$A = 0{,}2$ m .
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος m , υ_{max} :
(ταχύτητα που το σώμα m έχει στη θέση ισορροπίας του)
$\upsilon_{max} = \omega \cdot A \Rightarrow$
$\upsilon_{max} = 10 \cdot 0{,}2 \Rightarrow$
$\upsilon_{max} = 2$ m / s .

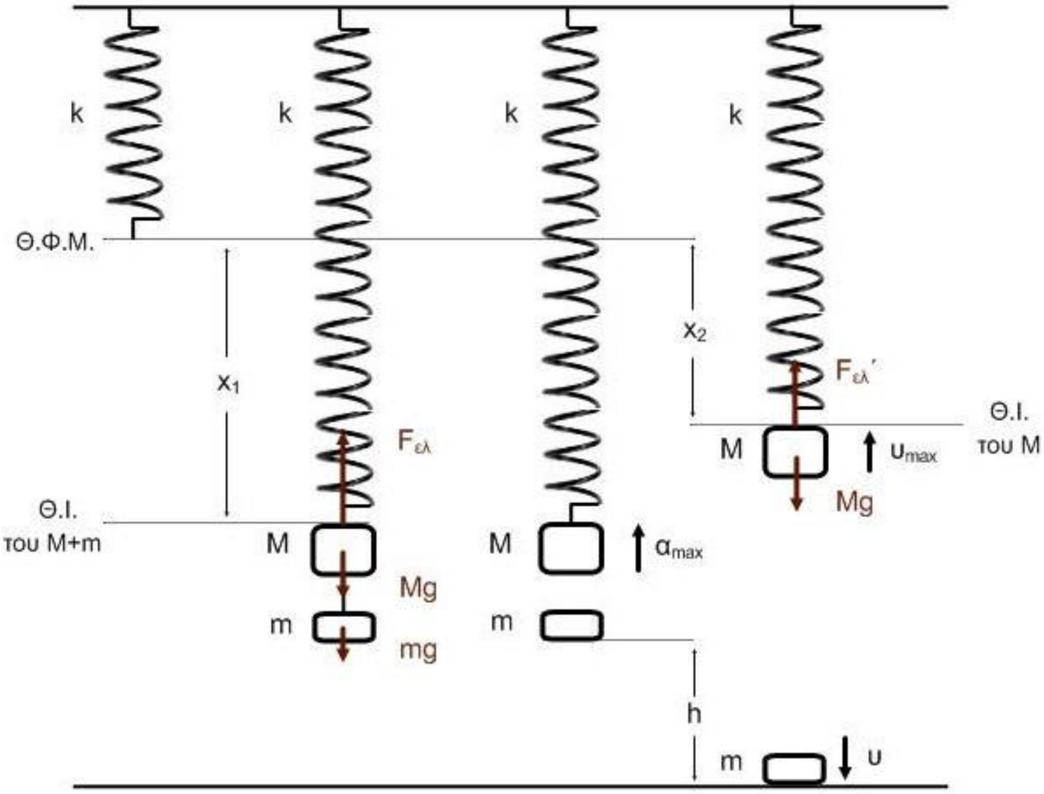
41) Το σώμα μάζας Μ = 5 kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k που το άνω άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή .
Το σώμα Μ είναι δεμένο μέσω νήματος (αβαρούς και μη εκτατού) με σώμα m = 1,25 kg .
Τα σώματα μάζας Μ , m και το ελατήριο σταθεράς k ισορροπούν . Στη θέση αυτή ισορροπίας , το σώμα μάζας m απέχει από το οριζόντιο επίπεδο του εδάφους απόσταση h = 0,5 m .



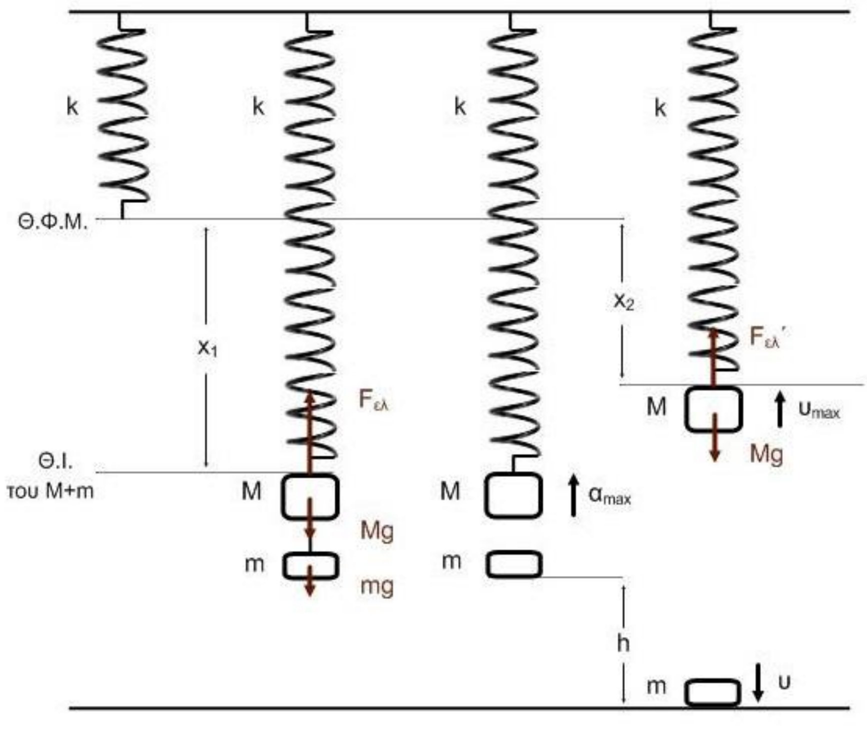
Την χρονική στιγμή μηδέν , καίμε με ένα σπίρτο το νήμα . Τη χρονική στιγμή που το σώμα m φτάνει στο έδαφος , το σώμα μάζας M αποκτά για πρώτη φορά μέγιστη ταχύτητα .
Να υπολογίσετε :
α. Την ταχύτητα του σώματος m , όταν φτάνει στο δάπεδο .
β. Την σταθερά του ελατηρίου k ,
γ. Την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος M σε συνάρτηση με τον χρόνο ,
δ. Να υπολογίσετε το λόγο της συνισταμένης δύναμης ταλάντωσης του συστήματος προς τη δύναμη του ελατηρίου , τη χρονική στιγμή που το νήμα κάηκε .
Λύση
α.



Το νήμα που ενώνει το σώμα μάζας M με το σώμα μάζας m καίγεται .
Το σώμα μάζας m εκτελεί ελεύθερη πτώση ,
η κατακόρυφη μετατόπιση :
$h = ½·g·t^2 ⇒$
$t^2 = 2·h / g ⇒$
$t = √(2·h / g) ⇒$
$t = √(2·½ / 10) ⇒$
$t = √10 / 10$ s .
η ταχύτητα :
$υ = g·t ⇒$
$υ = 10·(√10 / 10) ⇒$
$υ = √10$ s .
β.
Τη χρονική στιγμή που το σώμα m φτάνει στο έδαφος , το σώμα μάζας M αποκτά για πρώτη φορά μέγιστη ταχύτητα .
Το σώμα μάζας M αποκτά μέγιστη ταχύτητα όταν βρεθεί στη θέση ισορροπίας .
Άρα ο χρόνος , είναι :
$t = T / 4 ⇒$
$T = 4·t ⇒$
$T = 4·(√10 / 10) ⇒$
$T = √10 / 2,5$ s .
Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος M , είναι :
$T = 2·π·√(M / k) ⇒$
$T^2 = 4·π^2·M / k ⇒$
$k = 4·π^2·M / T^2 ⇒$
$k = 4·10·5 / (√10 / 2,5)^2 ⇒$
$k = 200 / (10 / 6,25) ⇒$
$k = 125$ N / m .
γ.
Το νήμα που ενώνει το σώμα μάζας M με το σώμα μάζας m καίγεται .
Το σώμα μάζας M εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και την χρονική στιγμή μηδέν (σημείο εκκίνησης) της ταλάντωσης του το σώμα βρίσκεται στην θέση x = – A .

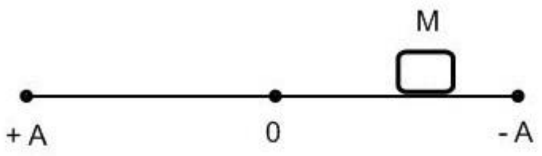


Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι :
$x = A \cdot ημ\,(ω \cdot t + φ_0) \Rightarrow$
Η αρχική φάση της ταλάντωσης υπολογίζεται για t = 0 αν x = – A ,
$– A = A \cdot ημ\,(ω \cdot 0 + φ_0) \Rightarrow$
$ημ\,φ_0 = – 1 = ημ\,(3 \cdot π / 2) \Rightarrow$
$φ_0 = 2 \cdot κ \cdot π + (3 \cdot π / 2)$ ή $φ_0 = 2 \cdot κ \cdot π + π – (3 \cdot π / 2) \Rightarrow$
για κ = 0 ,
$φ_0 = (3 \cdot π / 2)$ rad ή $φ_0 = – (π / 2)$ rad που απορρίπτεται γιατί $0 \le φ_0 \le 2 \cdot π$ rad .
Άρα $φ_0 = (3 \cdot π / 2)$ rad .
Η γωνιακή συχνότητα ω :
$ω = 2 \cdot π / T \Rightarrow$
$ω = 2 \cdot π / (\sqrt{10} / 2{,}5) \Rightarrow$
$ω = 5 \cdot π \cdot \sqrt{10} / 10 \Rightarrow$
$ω = π \cdot \sqrt{10} / 2$ rad / s .
Η θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων Μ και m , η x_2 :



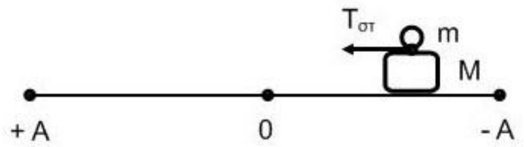
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda} - w_M - w_m = 0 \Rightarrow$
$k \cdot x_1 - M \cdot g - m \cdot g = 0 \Rightarrow$
$k \cdot x_1 = (M + m) \cdot g \Rightarrow$
$x_1 = (M + m) \cdot g / k \Rightarrow$
$x_1 = (5 + 1{,}25) \cdot 10 / 125 \Rightarrow$
$x_1 = 0{,}5$ m .
Η θέση ισορροπίας του σώματος M , η x_2 :
$\Sigma F_y' = 0 \Rightarrow$
$F_{\varepsilon\lambda}' - w_M = 0 \Rightarrow$
$k \cdot x_2 - M \cdot g = 0 \Rightarrow$
$k \cdot x_2 = M \cdot g \Rightarrow$
$x_2 = M \cdot g / k \Rightarrow$
$x_2 = 5 \cdot 10 / 125 \Rightarrow$
$x_2 = 0{,}4$ m .
Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος M , είναι :
$A = x_1 - x_2 \Rightarrow$
$A = 0{,}5 - 0{,}4 \Rightarrow$
$A = 0{,}1$ m .
Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι :
$x = A \cdot \eta\mu\ (\omega \cdot t + \phi_0) \Rightarrow$
$x = 0{,}1 \cdot \eta\mu\ [(\pi \cdot \sqrt{10} / 2) \cdot t + (3 \cdot \pi / 2)]$.
δ.
Ο λόγος του μέτρου της συνισταμένης δύναμης ταλάντωσης του συστήματος προς το μέτρο της δύναμη του ελατηρίου , τη χρονική στιγμή που το νήμα κάηκε :
$\Sigma F / F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot A / [k \cdot (A + x_2)] \Rightarrow$
$\Sigma F / F_{\varepsilon\lambda} = A / (A + x_2) \Rightarrow$
$\Sigma F / F_{\varepsilon\lambda} = 0{,}1 / (0{,}1 + 0{,}4) \Rightarrow$
$\Sigma F / F_{\varepsilon\lambda} = 0{,}1 / 0{,}5 \Rightarrow$
$\Sigma F / F_{\varepsilon\lambda} = 1 / 5$.

42) Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές με πλάτος 0,1 m . Σε ένα σημείο 0,06 m μακριά από την θέση ισορροπίας η ταχύτητα του σώματος είναι 0,32 m / s .



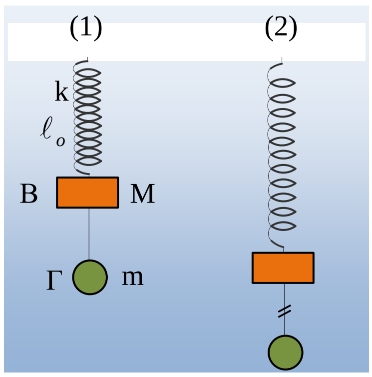
α. Πόση είναι η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης ;
β. Πόση είναι η απόσταση σημείου από την θέση ισορροπίας όταν η ταχύτητα είναι 0,12 m / s ;
γ. Ένα μικρό αντικείμενο με μάζα πολύ μικρότερη από από την μάζα του σώματος , τοποθετείται πάνω στο σώμα που ταλαντώνεται . Εάν το μικρό αντικείμενο είναι έτοιμο να γλιστρήσει στο ακρότατο σημείο της διαδρομής , ποιος είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του μικρού αντικειμένου και του σώματος ;
Δίνεται $g = 10$ m / s² .
Λύση
α.
Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης , έχουμε :
$E = K + U \Rightarrow$
$½ \cdot D \cdot A^2 = ½ \cdot M \cdot \upsilon_1^2 + ½ \cdot D \cdot x_1^2 \Rightarrow$
$D = M \cdot \omega^2$,
$M \cdot \omega^2 \cdot A^2 = M \cdot \upsilon_1^2 + M \cdot \omega^2 \cdot x_1^2 \Rightarrow$
$\omega^2 \cdot (A^2 - x_1^2) = \upsilon_1^2 \Rightarrow$
$\omega^2 = \upsilon_1^2 / (A^2 - x_1^2) \Rightarrow$
$\omega = \upsilon_1 / \sqrt{(A^2 - x_1^2)}] \Rightarrow$
$\omega = 0{,}32 / \sqrt{(0{,}1^2 - 0{,}06^2)} \Rightarrow$
$\omega = 4$ rad / s .
β.
Με διαδικασία παρόμοια με την διαδικασία του α ερωτήματος , θα πάρουμε :
$\upsilon_2^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x_2^2) \Rightarrow$
$\upsilon_2^2 = \omega^2 \cdot A^2 - \omega^2 \cdot x_2^2 \Rightarrow$
$\omega^2 \cdot x_2^2 = \omega^2 \cdot A^2 - \upsilon_2^2 \Rightarrow$
παίρνουμε απόλυτη τιμή γιατί ψάχνουμε την απόσταση ,
$|x_2| = (1 / \omega) \cdot \sqrt{(\omega^2 \cdot A^2 - \upsilon_2^2)} \Rightarrow$

$|x_2| = (1 / 4)\cdot\sqrt{(0{,}016 - 0{,}0144)} \Rightarrow$
$|x_2| = 0{,}38 / 4 \Rightarrow$
$|x_2| = 0{,}095$ m .
γ.



Το μικρό αντικείμενο ταλαντώνεται με δύναμη επαναφοράς τη $T_{στ}$:
$T_{στ} = - D_m\cdot x \Rightarrow$
όπου D_m η σταθερά επαναφοράς του συστήματος $D_m = m\cdot\omega'^2$,
$T_{στ} = - m\cdot\omega'^2\cdot x$.
Ισχύει :
$\omega' = \sqrt{[D / (m + M)]}$ του συστήματος και επειδή m << M διαιρούμε με M ,
$\omega' = \sqrt{\{(D / m) / [(m / M) + (M / M)]\}} \Rightarrow$
όπου $m / M \to 0$,
$\omega' \cong \sqrt{(D / M)} = \omega = 4$ rad / s .
Για να μην γλιστρά το μικρό αντικείμενο πάνω στο σώμα που ταλαντώνεται , πρέπει :
$|T_{στ,max}| \le T_{ορ} \Rightarrow$
όταν $x = \pm A$ τότε $T_{στ} = |T_{στ,max}|$,
$m\cdot\omega^2\cdot A \le \mu\cdot m\cdot g \Rightarrow$
$\mu \ge \omega^2\cdot A / g$.
Για να μην γλιστρά οριακά στην ακραία θέση πρέπει $\mu = \mu_{min}$, δηλαδή :
$\mu_{min} = \omega^2\cdot A / g \Rightarrow$
$\mu_{min} = 16\cdot 0{,}1 / 10 \Rightarrow$
$\mu_{min} = 0{,}16$.

43) Στο κάτω άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k έχει δεθεί ένα σώμα Β μάζας Μ, το οποίο συνδέεται μέσω νήματος με σώμα Γ, μάζας m. Ασκώντας κατάλληλη δύναμη στο Β σώμα, το φέρνουμε να ισορροπεί στη θέση (1) του διπλανού σχήματος, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του. Αν το όριο θραύσεως του νήματος είναι ίσο με 1,5mg και κάποια στιγμή t_0=0 αφήσουμε ελεύθερο το σύστημα να ταλαντωθεί, τότε:



i) Η τάση του νήματος, αμέσως μόλις αφεθεί το σύστημα ελεύθερο ($t=t_0^+$) έχει μέτρο:

α) $T_1 = 0$, β) $T_1 = mg$, γ) $T_1=Mg$

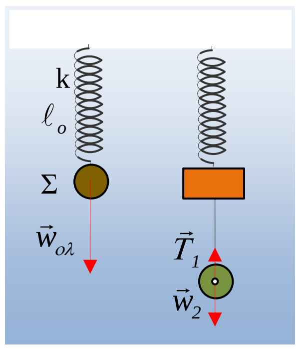
ii) Το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα θα σπάσει (θέση (2)), όταν το σώμα Γ διανύσει απόσταση s, όπου:

$$\alpha)\ s=\frac{(M+m)g}{2k},\quad \beta)\ s=\frac{(M+m)g}{k},\quad \gamma)\ s=\frac{3(M+m)g}{2k},\quad \delta)\ s=\frac{2(M+m)g}{k}$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Δίνεται ότι η ταλάντωση του συστήματος των παραπάνω σωμάτων είναι μια ΑΑΤ με D=k.

Απάντηση:



i) Ας αντιμετωπίσουμε το σύστημα των δύο σωμάτων, σαν ένα σώμα Σ μάζας M+m. Μόλις αφεθεί να κινηθεί, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος $w_{ολ}$, όπως στο πρώτο σχήμα, οπότε αποκτά επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Αλλά τότε και το σώμα Γ αποκτά την ίδια επιτάχυνση και παίρνοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα, (δεύτερο σχήμα), θα έχουμε:

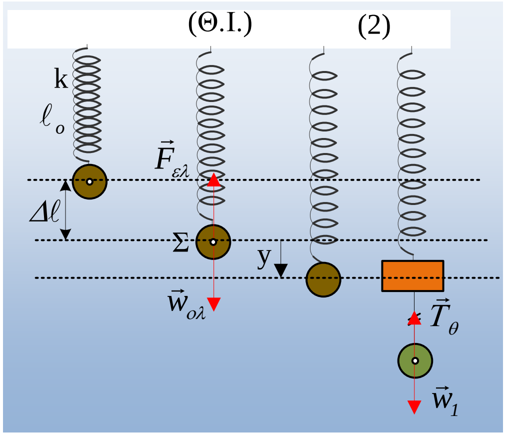
$$\Sigma F=m\cdot\alpha_o \rightarrow mg-T_1=m\cdot g \rightarrow T_1=0$$

Σωστό το α).

ii) Το σύστημα Σ, θα εκτελέσει ΑΑΤ, γύρω από τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.), έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά Δl, όπου:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow (M+m)g = k \cdot \Delta\ell \rightarrow$$

$$\Delta\ell = \frac{(M+m)g}{k}$$



Στην θέση ισορροπίας, η τάση του νήματος είναι ίση με το βάρος του Γ (και αυτό ισορροπεί…), οπότε το νήμα θα σπάσει σε μια χαμηλότερη θέση, όπως στο σχήμα η θέση (2), η οποία απέχει κατά y από την Θ.Ι. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το σώμα Γ, μας δίνει (θεωρούμε την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική):

$$\Sigma F = ma \rightarrow mg - T_\theta = m(-\omega^2 y) \rightarrow mg - T_\theta = -m\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}\right)^2 y \rightarrow$$

$$\frac{m}{M+m} ky = 1{,}5mg - mg = 0{,}5mg \rightarrow$$

$$y = \frac{(M+m)g}{2k}$$

Αλλά τότε το διάστημα που διανύει το σώμα, η απόσταση που διανύει μέχρι τη θέση που κόβεται το νήμα, είναι ίσο:

$$s = \Delta\ell + y = \frac{(M+m)g}{k} + \frac{(M+m)g}{2k} = \frac{3(M+m)g}{2k}$$

Σωστό το γ).

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

44) Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης δίνεται από την σχέση $A_t = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t}$.
α. Πόσο είναι το πλάτος σε χρόνο t = 2·ln 2 / Λ ;
β. Σε πόσο χρόνο το πλάτος θα γίνει $A = A_0 / 8$;

Λύση

α.

Το πλάτος :
$A_t = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t} \Rightarrow$
για t = 2·ln 2 / Λ :
$A_t = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot (2 \cdot \ln 2 / \Lambda)} \Rightarrow$
$A_t = A_0 \cdot e^{-2 \cdot \ln 2} \Rightarrow$
$A_t = A_0 \cdot (e^{\ln 2})^{-2} \Rightarrow$
$A_t = A_0 \cdot 2^{-2} \Rightarrow$
$A_t = A_0 / 4$.

β.

Δίνεται :
$A_t' = A_0 / 8 \Rightarrow$
$A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t} = A_0 / 8 \Rightarrow$
$e^{-\Lambda \cdot t} = 1 / 8 \Rightarrow$
$e^{\Lambda \cdot t} = 8 \Rightarrow$
$e^{\Lambda \cdot t} = 2^3 \Rightarrow$
$\ln e^{\Lambda \cdot t} = \ln 2^3 \Rightarrow$
$\Lambda \cdot t = 3 \cdot \ln 2 \Rightarrow$
$t = 3 \cdot \ln 2 / \Lambda$.

45) Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης δίνεται από την σχέση $A_t = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t}$, όπου A_0 είναι το πλάτος και Λ σταθερή ποσότητα.
α. Σε πόσο χρόνο το πλάτος θα γίνει $A = A_0 / 2$;
β. Αν για κάθε πλήρη ταλάντωση η επί της εκατό ελάττωση της ολικής ενέργειας $E_{ολ}$ είναι 36% , να βρείτε την επί της εκατό μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης .

Λύση

α.

Δίνεται :
$A_t' = A_0 / 2 \Rightarrow$

$A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t} = A_0 / 2 \Rightarrow$
$e^{-\Lambda \cdot t} = 1 / 2 \Rightarrow$
$e^{\Lambda \cdot t} = 2 \Rightarrow$
$\ln e^{\Lambda \cdot t} = \ln 2 \Rightarrow$
$\Lambda \cdot t = \ln 2 \Rightarrow$
$t = \ln 2 / \Lambda$.
β.
Η επί της εκατό ελάττωση της ολικής ενέργειας $E_{ολ}$ είναι 36% :
$(\Delta E / E_0)\ \% = \{(E_0 - E) / E_0\} \cdot 100\ \% \Rightarrow$
(ουσιαστικά ισχύει $\Delta E = E - E_0$ αλλά $E_0 > E$)
$36\ \% = \{(½ \cdot D \cdot A_0^2 - ½ \cdot D \cdot A^2) / (½ \cdot D \cdot A_0^2)\} \cdot 100\ \% \Rightarrow$
$36\ \% / 100\ \% = \{(A_0^2 - A^2) / (A_0^2)\} \Rightarrow$
$0{,}36 = \{1 - (A / A_0)^2\} \Rightarrow$
$(A / A_0)^2 = 1 - 0{,}36 \Rightarrow$
$(A / A_0)^2 = 0{,}64 \Rightarrow$
$(A / A_0) = \sqrt{0{,}64} \Rightarrow$
$(A / A_0) = 0{,}8$.
Η επί της εκατό μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης :
$(\Delta A / A_0)\ \% = \{(A_0 - A) / A_0\} \cdot 100\ \% \Rightarrow$
(ουσιαστικά ισχύει $\Delta A = A - A_0$ αλλά $A_0 > A$)
$(\Delta A / A_0)\ \% = \{1 - (A / A_0)\} \cdot 100\ \% \Rightarrow$
$(\Delta A / A_0)\ \% = (1 - 0{,}8) \cdot 100\ \% \Rightarrow$
$(\Delta A / A_0)\ \% = 0{,}2 \cdot 100\ \% \Rightarrow$
$(\Delta A / A_0)\ \% = 20\ \%$.

46) Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης δίνεται από την σχέση $A_t = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t}$, όπου A_0 είναι το αρχικό πλάτος και Λ σταθερή ποσότητα.
α. Να δείξετε ότι ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του πλάτους της ταλάντωσης είναι σταθερός ,
β. Μετά από $N_1 = 18$ πλήρεις ταλαντώσεις , που διαρκούν $t_1 = 13{,}86$ s το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με $A_0 / 2$. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης , όταν γίνουν ακόμα $N_2 = 72$ πλήρεις ταλαντώσεις .
Θεωρήστε το αρχικό πλάτος A_0 γνωστό .
Λύση
α.
Δύο διαδοχικών τιμών του πλάτους της ταλάντωσης :
$A_\kappa = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t}$, $t = \kappa \cdot T$, άρα $A_\kappa = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot \kappa \cdot T}$.
$A_{\kappa+1} = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t'}$, $t' = (\kappa + 1) \cdot T$, άρα $A_{\kappa+1} = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot (\kappa + 1) \cdot T}$.
Ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του πλάτους της ταλάντωσης :
$A_\kappa / A_{\kappa+1} = (A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot \kappa \cdot T}) / (A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot (\kappa + 1) \cdot T}) \Rightarrow$
$A_\kappa / A_{\kappa+1} = (e^{-\Lambda \cdot \kappa \cdot T}) / (e^{-\Lambda \cdot (\kappa + 1) \cdot T}) \Rightarrow$
$A_\kappa / A_{\kappa+1} = e^{-\Lambda \cdot \kappa \cdot T + \Lambda \cdot (\kappa + 1) \cdot T} \Rightarrow$
$A_\kappa / A_{\kappa+1} = e^{-\Lambda \cdot \kappa \cdot T + \Lambda \cdot \kappa \cdot T + \Lambda \cdot T} \Rightarrow$
$A_\kappa / A_{\kappa+1} = e^{+\Lambda \cdot T}$,
β.
Το πλάτος δίνεται :
$A_\kappa = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t}$,
για $t_1 = N_1 \cdot T \Rightarrow$
$T = t_1 / N_1 \Rightarrow$
$T = 13{,}86 / 18$ s .
Ισχύει :
$A_0 / 2 = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t_1} \Rightarrow$
$e^{\Lambda \cdot t_1} = 2 \Rightarrow$
$\ln e^{\Lambda \cdot t_1} = \ln 2 \Rightarrow$
$\Lambda \cdot t_1 = \ln 2 \Rightarrow$
$\Lambda = \ln 2 / t_1$.
Όταν γίνουν ακόμα $N_2 = 72$ πλήρεις ταλαντώσεις , θα έχουμε συνολικά :
$N_2 = N_1 + N_2 \Rightarrow$
$N_2 = 18 + 72 \Rightarrow$
$N_2 = 90$ ταλαντώσεις .
Ο χρόνος θα είναι :
$t_2 = N_2 \cdot T$.
Το πλάτος θα είναι :
$A_2 = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t_2} \Rightarrow$
$A_2 = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot N_2 \cdot T} \Rightarrow$
$A_2 = A_0 \cdot e^{-(\ln 2 / t_1) \cdot 90 \cdot (13{,}86 / 18)} \Rightarrow$

$A_2 = A_0 \cdot e^{-(\ln 2 / t_1) \cdot 90 \cdot (13{,}86 / 18)} \Rightarrow$
$A_2 = A_0 \cdot e^{-(\ln 2 / 13{,}86) \cdot 90 \cdot (13{,}86 / 18)} \Rightarrow$
$A_2 = A_0 \cdot e^{-\ln 2 \cdot (90 / 18)} \Rightarrow$
$A_2 = A_0 \cdot e^{-5 \cdot \ln 2} \Rightarrow$
$A_2 = A_0 / (e^{\ln 2})^5 \Rightarrow$
$A_2 = A_0 / 2^5 \Rightarrow$
$A_2 = A_0 / 32$.

47) Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης δίνεται από την σχέση $A_t = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t}$, όπου A_0 είναι το αρχικό πλάτος και Λ σταθερή ποσότητα , ενώ η αρχική ενέργεια του ταλαντωτή είναι E_0 .
α. Μετά από πόσο χρόνο t_1 η ενέργεια του ταλαντωτή θα γίνει $E_1 = E_0 / 2$,
β. Πόση είναι η ενέργεια του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \cdot t_1$.
Θεωρήστε το ln 2 , Λ και την αρχική ενέργεια E_0 γνωστές ποσότητες .
Λύση
α.
Μας δίνετε :
$E_1 = E_0 / 2 \Rightarrow$
$½ \cdot D \cdot A_1^2 = (½ \cdot D \cdot A_0^2) / 2 \Rightarrow$
$A_1^2 = A_0^2 / 2 \Rightarrow$
$A_1 = A_0 / \sqrt{2} \Rightarrow$
$A_1 = A_0 \cdot \sqrt{2} / 2 \Rightarrow$
$A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t_1} = A_0 \cdot \sqrt{2} / 2 \Rightarrow$
$e^{-\Lambda \cdot t_1} = \sqrt{2} / 2 \Rightarrow$
$e^{\Lambda \cdot t_1} = 2 / \sqrt{2} \Rightarrow$
$e^{\Lambda \cdot t_1} = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 \Rightarrow$
$e^{\Lambda \cdot t_1} = \sqrt{2} \Rightarrow$
$\ln e^{\Lambda \cdot t_1} = \ln (2)^{(1/2)} \Rightarrow$
$\Lambda \cdot t_1 = ½ \cdot \ln 2 \Rightarrow$
$t_1 = \ln 2 / (2 \cdot \Lambda)$.
β.
Η ενέργεια του ταλαντωτή την χρονική στιγμή $t_2 = 3 \cdot t_1$:
$E_1 = ½ \cdot D \cdot A_1^2 \Rightarrow$
$E_1 = ½ \cdot D \cdot (A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t_2})^2 \Rightarrow$
$E_1 = ½ \cdot D \cdot A_0^2 \cdot e^{-2 \cdot \Lambda \cdot t_2} \Rightarrow$
$E_1 = E_0 \cdot e^{-2 \cdot \Lambda \cdot 3 \cdot t_1} \Rightarrow$
$E_1 = E_0 \cdot e^{-2 \cdot \Lambda \cdot 3 \cdot [\ln 2 / (2 \cdot \Lambda)]} \Rightarrow$
$E_1 = E_0 \cdot e^{-3 \cdot (\ln 2)} \Rightarrow$
$E_1 = E_0 \cdot e^{[(\ln 2)] \cdot (-3)} \Rightarrow$
$E_1 = E_0 \cdot (2)^{(-3)} \Rightarrow$
$E_1 = E_0 / 2^3 \Rightarrow$
$E_1 = E_0 / 8$.

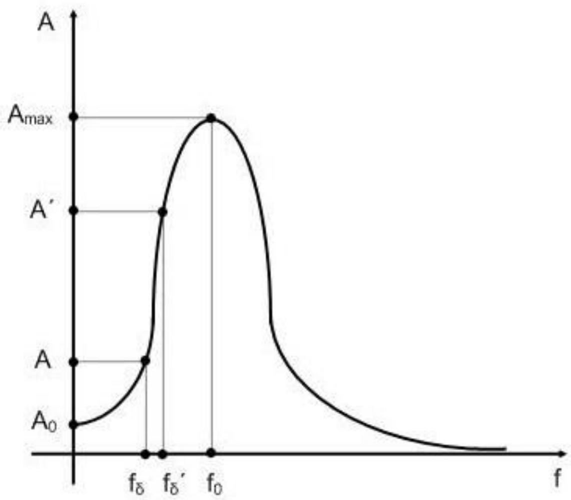
48) Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση το πλάτος ελαττώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 \cdot e^{-\ln 4 \cdot t}$.
Αν σε χρόνο t = 2·T το πλάτος ελαττώνεται κατά 50 % , να βρείτε την περίοδο T της φθίνουσας ταλάντωσης .
Λύση
$A = A_0 \cdot e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow$
σε χρόνο t = 2·T το πλάτος ελαττώνεται κατά 50 % ,
$A_0 / 2 = A_0 \cdot e^{-\ln 4 \cdot 2 \cdot T} \Rightarrow$
$1 / 2 = 1 / e^{\ln 8 \cdot T} \Rightarrow$
$e^{\ln 8 \cdot T} = 2 \Rightarrow$
$\ln e^{\ln 8 \cdot T} = \ln 2 \Rightarrow$
$\ln 8 \cdot T = \ln 2 \Rightarrow$
$8 \cdot T = 2 \Rightarrow$
$T = 1 / 4$ s.

49) Το πλάτος σε μια φθίνουσα ταλάντωση μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση : $A = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t}$.
Σε χρονικό διάστημα $t_1 = 30$ s πραγματοποιούνται 40 πλήρεις ταλαντώσεις και το πλάτος γίνεται ίσο με $A_0 / 5$.
Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης όταν πραγματοποιηθούν ακόμα 80 πλήρεις ταλαντώσεις .
Θεωρήστε το πλάτος A_0 γνωστό .
Λύση
$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t} \Rightarrow$
Σε $t = t_1$ έχουμε 40 πλήρεις ταλαντώσεις άρα $t_1 = 40 \cdot T$, το πλάτος $A_1 = A_0 / 5$,
$A_1 = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t_1} \Rightarrow$
$A_0 / 5 = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot 40 \cdot T} \Rightarrow$

$e^{-\Lambda\cdot 40\cdot T} = 1 / 5$ … (I) .
Όταν πραγματοποιηθούν ακόμα 80 πλήρεις ταλαντώσεις σε $t = t_2$ έχουμε $t_2 = 40\cdot T + 80\cdot T = 120\cdot T$, το πλάτος A_2 :
$A_2 = A_0\cdot e^{-\Lambda\cdot t_2} \Rightarrow$
$A_2 = A_0\cdot e^{-\Lambda\cdot 120\cdot T} \Rightarrow$
$A_2 = A_0\cdot e^{-\Lambda\cdot 3\cdot 40\cdot T} \Rightarrow$
$A_2 = A_0\cdot (e^{-\Lambda\cdot 40\cdot T})^3 \Rightarrow$
από την σχέση (I) ,
$A_2 = A_0\cdot (1 / 5)^3 \Rightarrow$
$A_2 = A_0 / 125$.

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

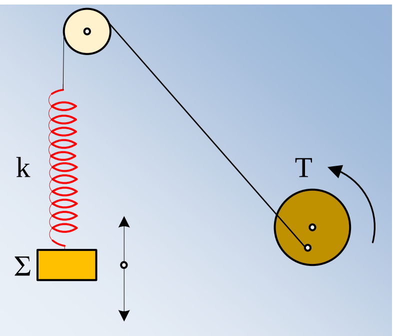
50) Μας δίνεται ένα σύστημα μάζας m = 2 kg και ελατηρίου k = 200 N / m , το σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση . Αν η συχνότητα του διεγέρτη είναι 5 / (4·π) να βρείτε :
α. Την ιδιοσυχνότητα του συστήματος ελατήριο – σώμα .
β. Την συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το σύστημα ελατήριο – σώμα , την συχνότητα του συστήματος στην κατάσταση του συντονισμού .
γ. Αν αυξήσουμε την συχνότητα του διεγέρτη κατά 60 % το πλάτος της ταλάντωσης θα αυξηθεί ή θα μειωθεί .
Λύση
α.
Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος ελατήριο – σώμα :
$f_0 = 1 / \{2\cdot\pi\cdot\sqrt{(m / k)}\} \Rightarrow$
$f_0 = 1 / \{2\cdot\pi\cdot\sqrt{(2 / 200)}\} \Rightarrow$
$f_0 = 1 / \{2\cdot\pi\cdot\sqrt{(1 / 100)}\} \Rightarrow$
$f_0 = 1 / \{2\cdot\pi\cdot(1 / 10)\} \Rightarrow$
$f_0 = 10 / (2\cdot\pi) \Rightarrow$
$f_0 = (5 / \pi)$ Hz .
β.
Η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος είναι η συχνότητα του διεγέρτη , άρα :
$f = f_\delta \Rightarrow$
$f = 5 / (4\cdot\pi)$ Hz .
Στην κατάσταση του συντονισμού :
$f = f_0 \Rightarrow$
$f = (5 / \pi)$ Hz .
γ.
Αυξάνουμε την συχνότητα του διεγέρτη κατά 60 % , άρα η συχνότητα του διεγέρτη γίνεται :
$f_\delta' = f_\delta + 60\,\%\cdot f_\delta \Rightarrow$
$f_\delta' = f_\delta + (60 / 100)\cdot f_\delta \Rightarrow$
$f_\delta' = (160 / 100)\cdot f_\delta \Rightarrow$
$f_\delta' = 1{,}6\cdot f_\delta \Rightarrow$
$f_\delta' = 1{,}6\cdot\{5 / (4\cdot\pi)\} \Rightarrow$
$f_\delta' = 2 / \pi$ Hz .
Σχεδιάζουμε το διάγραμμα πλάτους A – συχνότητας f :



Παρατηρούμε ότι αφού $f_\delta' > f_\delta$, τότε $A' > A$.
Δείτε στο σχήμα ότι όταν $f = f_0$, τότε $A = A_{max}$.

51) Σύστημα ελατηρίου μάζας εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση , το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού . Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι είναι $x = 0{,}2\cdot ημ\, ω\cdot t$, (S.I.) .
Η δύναμη απόσβεσης είναι $F_{απ} = -0{,}1\cdot υ$, (S.I.) , ενώ η εξωτερική περιοδική δύναμη είναι $F_{εξ} = F_0\cdot συν\,(π / 2)\cdot t$. Να βρείτε :
α. Την κυκλική συχνότητα ω .
β. Την μέγιστη τιμή της εξωτερικής περιοδικής δύναμης $F_{εξ}$.
Δίνεται $F_{εξ,max} = π\cdot b\cdot A_0^2\cdot ω$ και $π^2 \cong 10$.
Λύση
α.
Η εξωτερική περιοδική δύναμη έχει την γενική μορφή :
$F_{εξ} = F_0\cdot συν\, ω\cdot t$,
η εκφώνηση δίνει :
$F_{εξ} = F_0\cdot συν\,(π / 2)\cdot t$.
Άρα η σύγκριση των παραπάνω σχέσεων δίνει :
$ω = (π / 2)$ rad / s .
β.
Η γενική μορφή της απομάκρυνσης είναι :
$x = A_0\cdot ημ\,(ω\cdot t + φ_0)$,
η εκφώνηση δίνει :
$x = 0{,}2\cdot ημ\, ω\cdot t$.
Άρα η σύγκριση των παραπάνω σχέσεων δίνει :
$A_0 = 0{,}2$ m και $φ_0 = 0$.
Η γενική μορφή της δύναμης απόσβεσης είναι :
$F_{απ} = -b\cdot υ$.
η εκφώνηση δίνει :
$F_{απ} = -0{,}1\cdot υ$.
Άρα η σύγκριση των παραπάνω σχέσεων δίνει :
$b = 0{,}1$ kg / s .
Η μέγιστη τιμή της εξωτερικής περιοδικής δύναμης $F_{εξ,max}$, δίνεται :
(μια σχέση που δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο)
$F_{εξ,max} = π\cdot b\cdot A_0^2\cdot ω \Rightarrow$
$F_{εξ,max} = π\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2^2\cdot(π / 2) \Rightarrow$
$F_{εξ,max} = 0{,}02$ N .

52) Το σώμα Σ δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k, μπορεί να εκτελεί, απουσία αποσβέσεων, ΑΑΤ με συχνότητα 0,5Hz. Στη διάταξη του διπλανού σχήματος, παρουσία αποσβέσεων, το σώμα μπορεί να εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση ορισμένου πλάτους A_1, όταν ο τροχός Τ στρέφεται με περίοδο T_1=1s. Αν αυξήσουμε την περίοδο περιστροφής του τροχού στην τιμή T_2=1,25s, τότε:



i) Το πλάτος ταλάντωσης:

α) θα μειωθεί, β) θα μείνει το ίδιο, γ) θα αυξηθεί.

ii) Αν το πλάτος ταλάντωσης είναι A_2 , τότε:

Α) Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος θα είναι:

α) $2π f_2\cdot A_2$ β) $2π f_0\cdot A_2$ γ) άλλη τιμή.

Β) Για τις μέγιστες τιμές Δυναμικής και Κινητικής ενέργειας θα ισχύει:

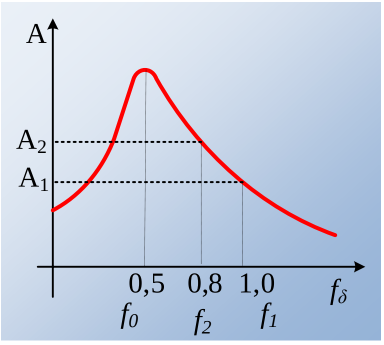
α) $K_{max} > U_{max}$, β) $K_{max} = U_{max}$, γ) $K_{max} < U_{max}$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

Η συχνότητα 0,5Hz της ελεύθερης και αμείωτης ταλάντωσης την ονομάζουμε ιδιοσυχνότητα (f_0=0,5Hz). Στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, το σώμα ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη, στην περίπτωσή μας, τη συχνότητα περιστροφής του τροχού, όπου $f_1 = 1/T_1$=1Hz και $f_2 = 1/T_2$=0,8Hz.

i) Παίρνουμε την καμπύλη συντονισμού, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου έχουμε σημειώσει τις παραπάνω συχνότητες, οι οποίες μας ενδιαφέρουν. Αλλά με βάση το σχήμα, όταν αυξάνουμε την περίοδο από την τιμή T_1 στην τιμή T_2, μειώνουμε τη συχνότητα, πλησιάζοντας προς την κατάσταση συντονισμού, από τις μεγαλύτερες συχνότητες. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος αυξάνεται, δηλαδή $A_2>A_1$. Σωστό το γ).



ii) Το σώμα ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη f_2 και με πλάτος A_2.

Α) Έτσι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_{max} = A\omega_\delta = A_2 \cdot 2\pi f_2$$

Σωστό το α).

Β) Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του σώματος είναι ίση:

$$U_{max} = \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2 A_2^2 \quad (1)$$

Ενώ η μέγιστη κινητική ενέργεια:

$$K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_2^2 A_2^2 \quad (2)$$

Αλλά με βάση τις τιμές που έχουμε:

$$f_2 > f_0 \;\Rightarrow\; \omega_2 > \omega_o \;\xrightarrow{(1)(2)} K_{max} > U_{max}$$

Σωστό το α).