ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ (ΜΕ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ) ΣΤΟ ΣΤΕΡΕΟ

1)

Ένας δίσκος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου 10 *rad/s*, γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο δίσκος αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου 2 *rad/s²*. Να υπολογίσετε

α. τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του δίσκου θα διπλασιαστεί.

β. τη γωνία που θα διαγράψει μια ακτίνα του δίσκου στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - t_0$.

γ. τον αριθμό των περιστροφών του δίσκου στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - t_0$.

δ. τη μεταβολή στο μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - t_0$.

Λύση

Η κίνηση του δίσκου είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη.

Ισχύουν οι εξισώσεις 4.11 και 4.12: $\begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \\ \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \end{array}$.

α. Από την 4.11 λύνοντας ως προς t παίρνουμε $t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow t_1 = \frac{20-10}{2} s \Rightarrow$

$\boxed{t_1 = 5s}$

β. Από την εξίσωση 4.12 με αντικατάσταση προκύπτει:

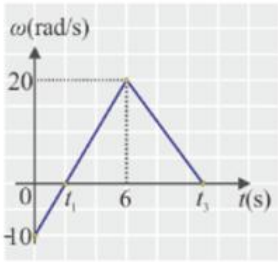
$$\theta - \cancel{\theta_0} = 10 rad/s \cdot 5s + \frac{1}{2} \cdot 2 rad/s^2 \cdot (5s)^2 \Rightarrow \theta = 50(rad) + 25(rad) \Rightarrow \boxed{\theta = 75(rad)}$$

γ. Όταν ο δίσκος κάνει μία πλήρη περιστροφή, μια ακτίνα του στρέφεται κατά γωνία 2π (rad). Επομένως αν σε χρόνο Δt εκτελέσει Ν περιστροφές η γωνία περιστροφής μιας ακτίνας του θα υπολογιστεί από τη σχέση $\Delta\theta = N\,2\pi \Rightarrow \boxed{N = \frac{75}{2\pi} \text{περιστροφές}}$.

δ. Επειδή στην ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, από την εξίσωση 4.8 που συνδέει τα μέτρα της γραμμικής με τη γωνιακή επιτάχυνση $(\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R)$, προκύπτει ότι και το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης παραμένει σταθερό κάθε χρονική στιγμή. Έτσι σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα ισχύει $\boxed{\Delta\alpha_\varepsilon = 0}$.

2)

Ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους $l = 3$ m και μάζας $M = 1$ kg βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το ένα άκρο της Α. Στο άλλο άκρο της ράβδου ασκείται δύναμη F η οποία είναι συνέχεια κάθετη στη ράβδο. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως δείχνει το διάγραμμα. Ο συνολικός αριθμός περιστροφών της ράβδου είναι $N = 100/2\pi$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από το ένα άκρο της είναι $I = \frac{1}{3}Ml^2$.



α. Ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα;

β. Ποια η γωνιακή μετατόπιση της ράβδου στο τελευταίο δευτερόλεπτο;

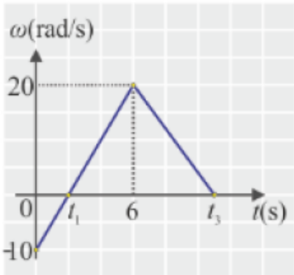
γ. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή $t_2 = 5$ s.

δ. Βρείτε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή t_1 και τη χρονική στιγμή t_2.

ε. Βρείτε τη γωνιακή μετατόπιση της ράβδου όταν έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10$ rad/s.

ΛΥΣΗ

α. Από το διάγραμμα βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα από 0 s έως 6 s:



$$\alpha_{\gamma 1} = \frac{20 - (-10)}{6} \Rightarrow \alpha_{\gamma 1} = 5\ \mathrm{rad/s^2}$$

Στο χρονικό διάστημα από 0 s έως 6 s είναι:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma 1} t \Rightarrow$$

$$\omega = -10 + 5t\ \text{(SI)}$$

Είναι $\omega = 0$ τη χρονική στιγμή t_1

$$0 = -10 + 5t_1 \Rightarrow t_1 = 2\ \mathrm{s}$$

β. Στα χρονικά διαστήματα από 0 s έως 6 s και από 6 s έως t_3 οι γωνιακές μετατοπίσεις είναι:

$$\Delta\theta_1 = \frac{2\cdot(-10)}{2} \Rightarrow \Delta\theta_1 = -10\ \text{rad και}\ \Delta\theta_2 = \frac{20(t_3 - 2)}{2} = 10(t_3 - 2)$$

Από τον συνολικό αριθμό περιστροφών της ράβδου βρίσκουμε:

$$N = \frac{|\Delta\theta_1| + |\Delta\theta_2|}{2\pi} \Rightarrow 100 = 10 + 10|t_3 - 2| \Rightarrow t_3 = 11\ \mathrm{s}$$

Από το διάγραμμα βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα από 6 s έως 11 s:

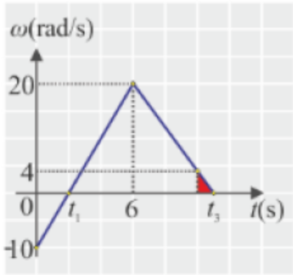
$$\alpha_{\gamma 2} = \frac{-20}{11 - 6} \Rightarrow \alpha_{\gamma 2} = -4\ \mathrm{rad/s^2}$$

Στο διάστημα αυτό η εξίσωση γωνιακής ταχύτητας είναι:

$$\omega = \omega_1 + \alpha_{\gamma 2}(t - t_2) \Rightarrow \omega = 20 - 4(t - 6) \Rightarrow \omega = 44 - 4t\ \text{(SI)}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 10$ s είναι $\omega = 44 - 4 \cdot 10 \ = 4$ rad/s,

οπότε στο τελευταίο δευτερόλεπτο με εμβαδομέτρηση βρίσκουμε:



$$\Delta\theta' = \frac{1 \cdot 4}{2} \Rightarrow \Delta\theta' = 2 \text{ rad}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του κέντρου μάζας είναι η επιτρόχιος επιτάχυνση του.

Τη στιγμή t είναι : $\alpha_\gamma = \alpha_{\gamma 1} = 5 rad/s^2$

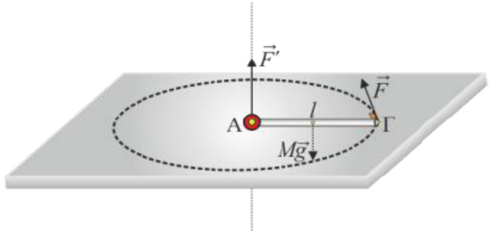
$$\frac{dv}{dt} = \alpha_{\gamma 1} \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 2{,}5 \text{ m/s}^2$$

δ. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του κέντρου μάζας είναι:

$$a_\kappa = \omega^2 \frac{l}{2}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 είναι $a_{\kappa 1} = 0$

και τη χρονική στιγμή t_2 είναι:



$$\omega_2 = -10 + 5t = -15 rad/s$$

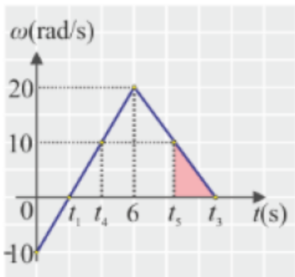
$$a_{\kappa 2} = \omega_2^2 \frac{l}{2} \Rightarrow a_{\kappa 2} = 225 \frac{3}{2} = 337{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ε. Είναι $\omega = 10$ rad/s τις χρονικές στιγμές t_4 και t_5 για τις οποίες ισχύουν:

$$10 = -10 + 5t_4 \Rightarrow t_4 = 4 \text{ s}$$

$$10 = 44 - 4t_5 \Rightarrow t_5 = 8{,}5 \text{ s}$$

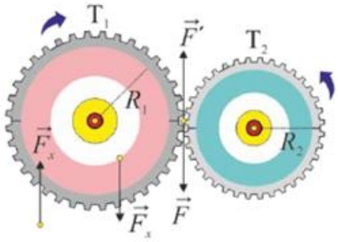
Τη χρονική στιγμή t_4 είναι $\Delta\theta_4 = 0$. Τη χρονική στιγμή t_5 θα βρούμε τη γωνιακή μετατόπιση αφαιρώντας το χρωματισμένο εμβαδόν από το συνολικό:



$$\Delta\theta_5 = \frac{2 \cdot (-10)}{2} + \frac{20 \cdot 9}{2} - \frac{2{,}5 \cdot 10}{2} \Rightarrow \Delta\theta_5 = 67{,}5 \text{ m}$$

3)

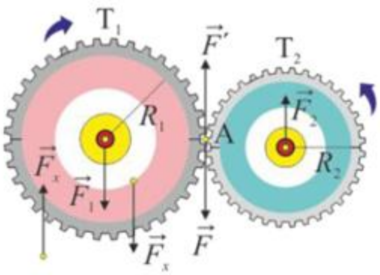
Δύο οδοντωτοί τροχοί T_1 και T_2 με ακτίνες $R_1 = 30$ cm, $R_2 = 20$ cm, αντίστοιχα, με το επίπεδο τους οριζόντιο, μπορούν να περιστρέφονται γύρω από ακλόνητους άξονες, όπως στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκούμε στον τροχό T_1 ζεύγος δυνάμεων που έχει σταθερή ροπή στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του



βρείτε:

τον λόγο των αλγεβρικών τιμών των γωνιακών επιταχύνσεων των δύο τροχών.

ΛΥΣΗ



F και F' είναι οι δυνάμεις που ασκεί ο ένας τροχός στον άλλον και αποτελούν ζεύγος δράσης - αντίδρασης.
Οι δυνάμεις του ζεύγους είναι (F_x, F_x)

F_1 και F_2 είναι οι δυνάμεις που δέχονται οι τροχοί από τους άξονες περιστροφής.
Θεωρώντας ότι τα δόντια των τροχών συμπλέκονται έτσι ώστε να μη χάνουν στροφές, τα σημεία επαφής τους έχουν κάθε χρονική στιγμή ίδια ταχύτητα:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2$$

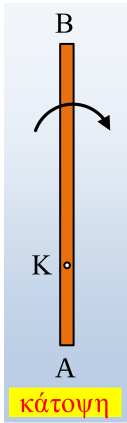
$$\Rightarrow R_1\omega_1 = R_2\omega_2 \Rightarrow$$

$$R_1\frac{d\omega_1}{dt} = R_2\frac{d\omega_2}{dt} \Rightarrow$$

$$R_1\alpha_{\gamma1} = R_2\alpha_{\gamma2} = a_A \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_{\gamma1}}{\alpha_{\gamma2}} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{\alpha_{\gamma1}}{\alpha_{\gamma2}} = \frac{2}{3}$$

4) Η ράβδος ΑΒ του σχήματος, μήκους ℓ=2m κινείται οριζόντια πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στρεφόμενη με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το σημείο Κ, όπου (ΑΚ)= ¼ ℓ, με φορά των δεικτών του ρολογιού. Ο άξονας z κινείται ευθύγραμμα και θεωρώντας την στιγμή που η ράβδος βρίσκεται στη θέση του σχήματος, ως αρχή μέτρησης των χρόνων (t_o=0), η ταχύτητα του άξονα μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση $\upsilon_K=1+(2/\pi)t$ (S.I.). Αν τη στιγμή t=0 το άκρο Α της ράβδου έχει μηδενική ταχύτητα, να βρεθούν:



i) Η κατεύθυνση της ταχύτητας του άξονα z.

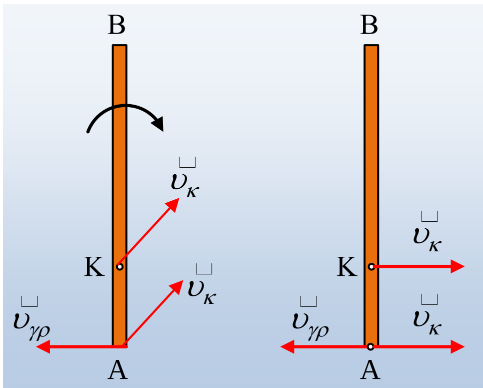
ii) Η ταχύτητα του άκρου Β, τη στιγμή t_o=0.

iii) Η ταχύτητα και η μετατόπιση του άκρου Α, μόλις η ράβδος ολοκληρώσει μια περιστροφή, τη στιγμή t_1.

iv) Η ταχύτητα του άκρου Β τη χρονική στιγμή t_2=(5π/4) s.

Απάντηση:

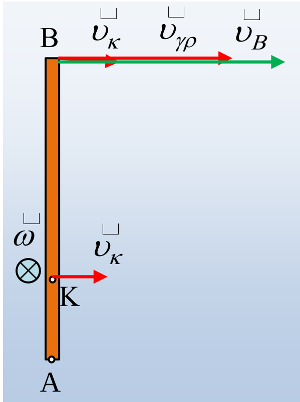
i) Έστω ότι η ταχύτητα του άξονα z, ίση με την ταχύτητα του σημείου Κ, είναι αυτή του πρώτου από τα διπλανά σχήματα. Η ράβδος, εκτελεί μια σύνθετη κίνηση, την οποία μελετάμε ως σύνθεση μιας μεταφορικής κίνησης, με ταχύτητα ίση με αυτή του άξονα $\vec{\upsilon}_\kappa$ και μια περιστροφική γύρω από τον άξονα z, με γωνιακή ταχύτητα ω. Αλλά τότε το άκρο Α θα έχει την ταχύτητα του άξονα $\vec{\upsilon}_\kappa$ και μια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ κάθετη στην ράβδο με μέτρο $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot(AK)$. Για να έχει όμως μηδενική ταχύτητα το σημείο Α, θα πρέπει οι δυο αυτές ταχύτητες να είναι αντίθετες, πράγμα που σημαίνει ότι η κατάσταση είναι αυτή που φαίνεται στο δεύτερο σχήμα, η ταχύτητα δηλαδή του άξονα, τη στιγμή t=0, είναι κάθετη στη ράβδο, με φορά προς τα δεξιά, ας το πούμε στη διεύθυνση x.



ii) Με βάση τα παραπάνω:

$$\vec{\upsilon}_A=0 \rightarrow \upsilon_\kappa=\upsilon_{\gamma\rho} \rightarrow \omega\frac{l}{4}=\upsilon_\kappa \rightarrow$$

$$\omega=\frac{4\upsilon_\kappa}{l}=\frac{4\cdot 1}{2}rad/s=2rad/s$$



Οπότε, με βάση το διπλανό σχήμα η ταχύτητα του άκρου Β, είναι κάθετη στην ράβδο, με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

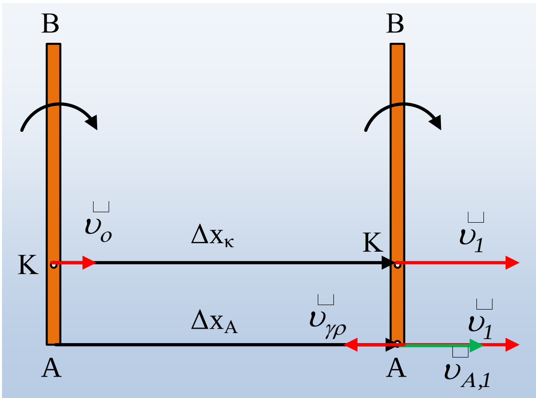
$$\upsilon_B=\upsilon_\kappa+\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_\kappa+\omega\cdot\frac{3l}{4}\rightarrow$$

$$\upsilon_B=1m/s+2\cdot\frac{3\cdot 2}{4}m/s=4m/s$$

iii) Η περίοδος περιστροφής της ράβδου είναι ίση:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}s=\pi \ \ s$$

Με βάση την εξίσωση $\upsilon_\kappa=1+(2/\pi)t$ προκύπτει ότι ο άξονας κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα με επιτάχυνση $\alpha=(2/\pi)$ m/s^2, οπότε σε χρόνο μιας περιόδου ο άξονας μετατοπίζεται ευθύγραμμα στην διεύθυνση x, κατά:



$$\Delta x_\kappa=\upsilon_o t+\frac{1}{2}at^2=\left(1\cdot\pi+\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\pi^2\right)m=2\pi \ \ m=6,28m$$

Έχοντας αποκτήσει ταχύτητα υ_1:

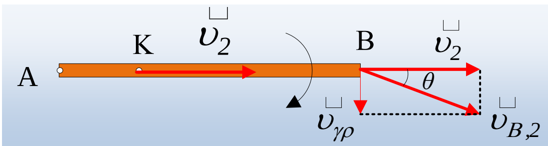
$$\upsilon_1=1+\frac{2}{\pi}t_1=\left(1+\frac{2}{\pi}\cdot\pi\right)m/s=3m/s$$

Στο σχήμα βλέπουμε τις θέσεις της ράβδου τις στιγμές t=0 και t_1=T, από όπου παρατηρούμε ότι η μετατόπιση του άξονα είναι ίση και με την μετατόπιση του άκρου Α της ράβδου, δηλαδή $\Delta x_A=\Delta x_\kappa=6,28m$.

Όσον αφορά την ταχύτητα του άκρου Α, τη στιγμή t_1, θα έχουμε:

$$\upsilon_{A,1}=\upsilon_1-\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_1-\omega\frac{l}{4}=3m/s-2\cdot\frac{2}{4}m/s=2m/s$$

iv) Τη χρονική στιγμή t_2, η ράβδος έχει περιστραφεί κατά:



$$\Delta\theta=\omega\cdot\Delta t=\omega\cdot t_1=2\cdot\frac{5\pi}{4}rad=2,5\pi \ rad=\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)rad$$

Δηλαδή η θέση της ράβδου είναι όπως στο σχήμα.

Τη στιγμή αυτή ο άξονας έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_2=1+\frac{2}{\pi}t_2=\left(1+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{4}\right)m/s=3,5m/s$$

Οπότε για την ταχύτητα του άκρου Β, με βάση το σχήμα, θα έχουμε:

$$\upsilon_{B,2}=\sqrt{\upsilon_2^2+\left(\omega\frac{3l}{4}\right)^2}=\sqrt{3,5^2+3^2}m/s\approx 4,6m/s \text{ και}$$

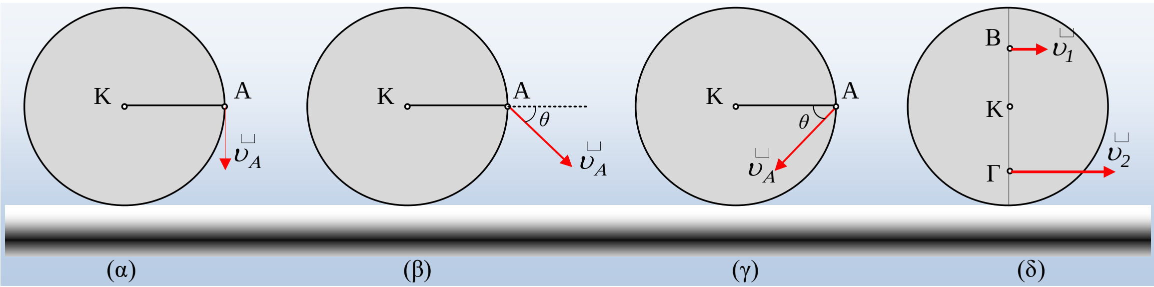
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{\upsilon_2} = \frac{3}{3{,}5} = \frac{6}{7}$$

Σχόλιο.

Η παραπάνω κίνηση της ράβδου, προφανώς δεν είναι κίνηση ελεύθερου στερεού! Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να δώσουμε το παρακάτω:

Ένα φορτηγό κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση, ενώ στην καρότσα του έχουμε στερεώσει μια κατακόρυφη σωλήνα- άξονα, γύρω από τον οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα η ράβδος, διαγράφοντας οριζόντιο επίπεδο…

5)Ένας ομογενής δίσκος κέντρου Κ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και το σημείο Α, είναι στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας (στα σχήματα α, β και γ). Στο σχήμα (δ) τα σημεία Β και Γ είναι πάνω στην κατακόρυφη διάμετρο και ισαπέχουν του κέντρου Κ.



i) Τι κίνηση πραγματοποιεί ο δίσκος του (α) σχήματος, όπου η ταχύτητα υ_A είναι κατακόρυφη;

ii) Στο σχήμα (β), αν θ=45°, να εξηγήσετε γιατί ο δίσκος κυλίεται προς τα δεξιά.

iii) Στο σχήμα (γ), αν θ=45°, να εξετάσετε αν ο δίσκος κυλίεται ή όχι.

iv) Οι ταχύτητες των σημείων Β και Γ του δίσκου του (δ) σχήματος, είναι οριζόντιες με μέτρα υ_1=1m/s και υ_2=3m/s αντίστοιχα. Τότε ο δίσκος:

α) κινείται προς τα δεξιά και στρέφεται δεξιόστροφα.

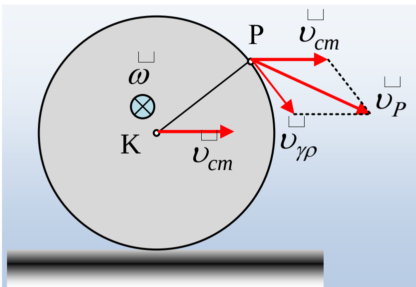
β) Έχει ταχύτητα υ_{cm} προς τα δεξιά και στρέφεται αριστερόστροφα.

γ) Κινείται προς τα αριστερά και στρέφεται δεξιόστροφα.

δ) Έχει ταχύτητα υ_{cm} προς τα αριστερά και στρέφεται αριστερόστροφα.

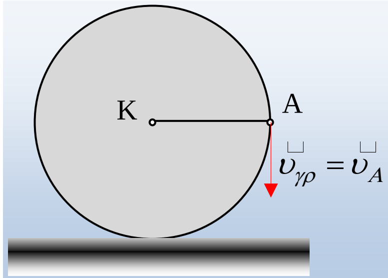
Ποια από τα παραπάνω ενδεχόμενα μπορεί να ισχύουν; Μήπως ο δίσκος αυτός κυλίεται;

Απάντηση:



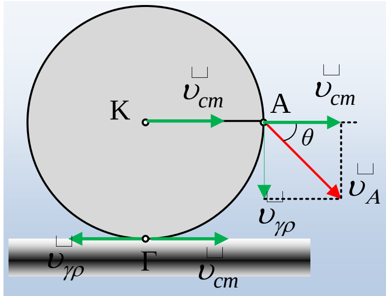
Θεωρούμε την κίνηση του δίσκου σύνθετη. Μια μεταφορική με ταχύτητα του κέντρου του υ_{cm} και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το κέντρο του Κ με γωνιακή ταχύτητα ω. Έτσι κάθε σημείο, όπως το σημείο Ρ του σχήματος, θα έχει τις ταχύτητες που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, όπου $\upsilon_{\gamma\rho}$ η γραμμική ταχύτητά του λόγω της κυκλικής κίνησης του Ρ, γύρω από το Κ.

i) Στο σχήμα (α), ο δίσκος εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από τον άξονά του ο οποίος περνά από το κέντρο του Κ. Ισοδύναμα η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι μηδενική, αφού σε κάθε άλλη περίπτωση η ταχύτητα του σημείου Α, θα είχε και μια οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας. Εδώ η ταχύτητα του Α είναι κατακόρυφη, άρα πρόκειται για γραμμική ταχύτητα λόγω της κυκλικής κίνησης του Α, γύρω από το Κ.



ii) Στην περίπτωση του σχήματος (β) αναλύουμε την ταχύτητα του σημείου Α, σε δύο συνιστώσες.

Μια οριζόντια, η οποία είναι ίση με την ταχύτητα του κέντρου Κ, λόγω μεταφορικής κίνησης, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα θα είναι ίση με την γραμμική ταχύτητα του Α. Αλλά αφού θ=45°, το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων είναι τετράγωνο και $\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}$.



Αν τώρα έρθουμε στο σημείο Γ, επαφής του δίσκου με το οριζόντιο επίπεδο, θα έχει τις συνιστώσες ταχύτητες που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, οπότε η ταχύτητά του είναι ίση:

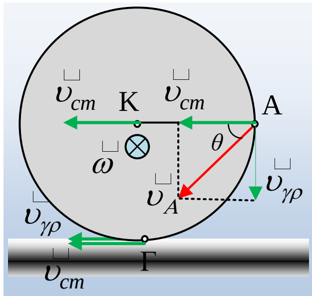
$$\upsilon_\Gamma=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}=0 \quad (1)$$

Αλλά τότε ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο.

Σημείωση: Η σχέση (1) γράφεται και ως:

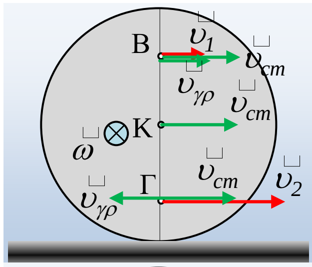
$$\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}=0 \rightarrow \upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$$

εξίσωση που συνήθως θεωρείται ως η συνθήκη για την κύλιση. Πράγμα που δεν θεωρείται απαραίτητο, αφού μπορούμε να στηριχθούμε στο ότι είναι μηδενική η ταχύτητα του σημείου Γ.



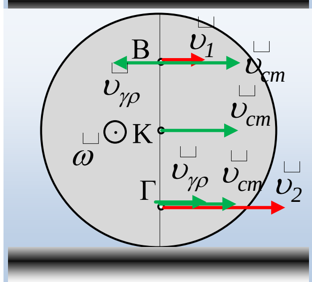
iii) Αναλύουμε επίσης την ταχύτητα του σημείου Α, σύμφωνα με την παραπάνω λογική, παίρνοντας το διπλανό σχήμα. Αλλά τότε βλέπουμε ότι η ταχύτητα του κέντρου Κ, έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά, ενώ ο δίσκος στρέφεται δεξιόστροφα. Τότε όμως το σημείο Γ έχει και ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης και λόγω περιστροφικής κίνησης με κατεύθυνση προς τα αριστερά, οπότε η ταχύτητα του Γ είναι μη μηδενική με κατεύθυνση προς τα αριστερά και ο δίσκος δεν κυλίεται (περιστρέφεται και μεταφέρεται, αλλά δεν κυλίεται…)

iv) Ας εξετάσουμε αναλυτικά τις παρακάτω περιπτώσεις, ελέγχοντας τις ταχύτητες των σημείων Β και Γ.



α) Αν ο δίσκος κινείται προς τα δεξιά και στρέφεται δεξιόστροφα.

Τότε το σημείο Β θα έχει ταχύτητα $\upsilon_1=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}$ ενώ το σημείο Γ ταχύτητα $\upsilon_2=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}$. Με βάση τις σχέσεις αυτές θα πρέπει $\upsilon_B > \upsilon_\Gamma$, πράγμα που δεν συμβαίνει. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

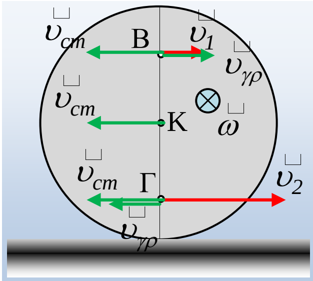


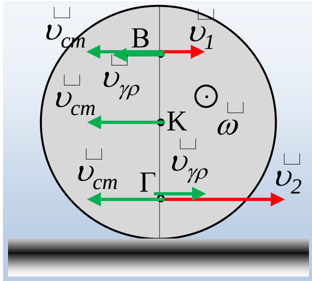
β) Έχει ταχύτητα υ_{cm} προς τα δεξιά και στρέφεται αριστερόστροφα.

Στην περίπτωση αυτή $\upsilon_1=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}$ ενώ το σημείο Γ ταχύτητα $\upsilon_2=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}$. Οπότε τότε $\upsilon_2 > \upsilon_1$, συμβατό με τις δοθείσες τιμές. Η πρόταση μας δίνει ένα σωστό ενδεχόμενο.

γ) Κινείται προς τα αριστερά και στρέφεται δεξιόστροφα.

Στην περίπτωση αυτή, θα είχαμε το πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, από όπου προκύπτει ότι η ταχύτητα του σημείου Γ θα έπρεπε να έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και όχι προς τα δεξιά, όπως μας έχει δοθεί. Λάθος υπόθεση.

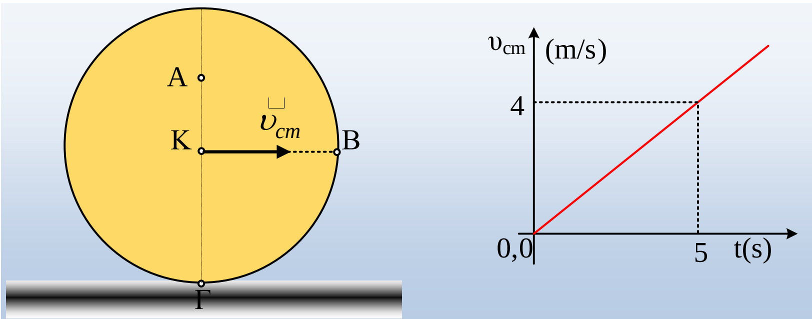




δ) Έχει ταχύτητα $υ_{cm}$ προς τα αριστερά και στρέφεται αριστερόστροφα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε το δεξιό από τα παραπάνω σχήματα. Αλλά τότε το σημείο Β θα έπρεπε να έχει ταχύτητα προς τα αριστερά, που και πάλι δεν ισχύει. Επίσης λάθος ενδεχόμενο.

Με βάση τα παραπάνω, μόνο το β) ενδεχόμενο μπορεί να ισχύει. Ο δίσκος να έχει ταχύτητα $υ_{cm}$ προς τα δεξιά και στρέφεται αριστερόστροφα. Προφανώς στην περίπτωση αυτή ο δίσκος δεν κυλίεται…

6)Ένας λεπτός δίσκος, ακτίνας R=0,8m αρχικά ακίνητος σε οριζόντιο επίπεδο, δέχεται κατάλληλη δύναμη οπότε αρχίζει να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει). Στο πρώτο σχήμα βλέπετε τον κυλιόμενο δίσκο, ενώ στο δεύτερο δίνεται η ταχύτητα του κέντρου του Κ (και κέντρου μάζας του), σε συνάρτηση με το χρόνο.

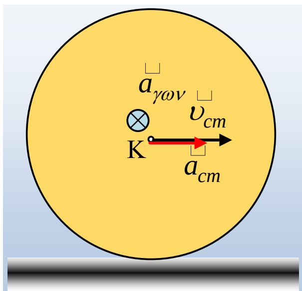


i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του κέντρου Κ, καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.

ii) Να υπολογιστεί η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου Α, πάνω στην κατακόρυφο διάμετρο, το οποίο απέχει κατά (ΚΑ)=r=0,4m από το κέντρο του δίσκου.

iii) Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή t_1 το σημείο Β, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, έχει κατακόρυφη επιτάχυνση. Πόση είναι τη στιγμή αυτή η επιτάχυνση του σημείου Γ, στο άκρο της κατακόρυφης ακτίνας, σημείο επαφής με το οριζόντιο επίπεδο;

Απάντηση:



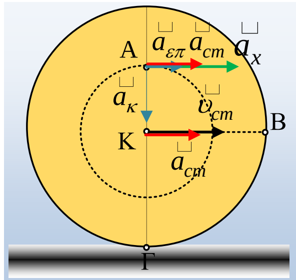
i) Θεωρούμε την κίνηση του δίσκου σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο νοητό άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του Κ. Με βάση το διάγραμμα για την ταχύτητα του κέντρου Κ του δίσκου, συμπεραίνουμε ότι η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση κέντρου μάζας, ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα και μέτρο:

$$\alpha_{cm} = a_K = \frac{\Delta υ}{\Delta t} = \frac{4}{5} m/s^2 = 0{,}8 m/s^2 .$$

Αλλά αφού ο δίσκος κυλίεται, τότε και η στροφική του κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, με διεύθυνση αυτή του άξονα και φορά όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\alpha_{cm} = a_{γων} R \rightarrow a_{γων} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{0{,}8}{0{,}8} rad/s^2 = 1 rad/s^2 .$$

ii) Το σημείο Α έχει την επιτάχυνση του κέντρου Κ του δίσκου α_{cm}, λόγω μεταφορικής κίνησης και έχει επίσης επιτάχυνση, λόγω της κυκλικής κίνησής του γύρω από το Κ. Η δεύτερη όμως αναλύεται σε δύο συνιστώσες μια οριζόντια, εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, η οποία μεταβάλει το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας (της ταχύτητας λόγω της κυκλικής κίνησης), την οποία ονομάζουμε επιτρόχια επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon\pi}$ και μια στην διεύθυνση της ακτίνας, η οποία μεταβάλλει την διεύθυνση της (γραμμικής) ταχύτητας, α_{κ} την οποία ονομάζουμε κεντρομόλο. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα και των τριών. Αλλά για το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, σε μια κυκλική κίνηση έχουμε:



$$a_{\varepsilon\pi} = \frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = a_{\gamma\omega\nu} r$$

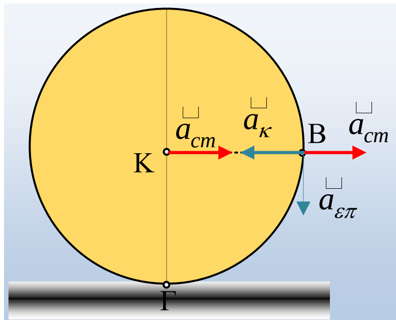
Με βάση αυτά στην οριζόντια διεύθυνση, το σημείο Α έχει επιτάχυνση, με κατεύθυνση προς τα δεξιά και μέτρο:

$$\alpha_x = a_{cm} + a_{\varepsilon\pi} = a_{cm} + a_{\gamma\omega\nu} r \rightarrow$$
$$\alpha_x = 0{,}8m/s^2 + 1\cdot 0{,}4m/s^2 = 1{,}2m/s^2.$$

Ας επισημανθούν δύο σημεία:

- Η παραπάνω επιτάχυνση είναι σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου.
- Είναι η επιτάχυνση του εκάστοτε σημείου του δίσκου, που θα βρεθεί στην θέση του σημείου Α!

iii) Με την ίδια λογική που σχεδιάσαμε τις επιταχύνσεις του σημείου Α, μπορούμε να σχεδιάσουμε και τις επιταχύνσεις του σημείου Β, όπως στο σχήμα. Αν όμως τελικά η επιτάχυνση του Β είναι κατακόρυφη, αυτό σημαίνει ότι:

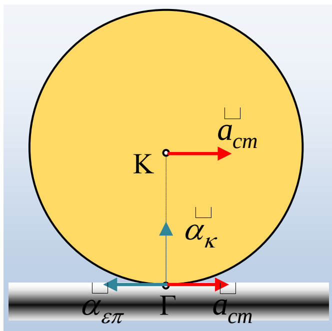


$$\alpha_{cm} - a_K = 0 \rightarrow a_K = \alpha_{cm} \rightarrow \omega^2 R = a_{cm} \rightarrow$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a_{cm}}{R}} = \sqrt{\frac{0{,}8}{0{,}8}} rad/s = 1 rad/s$$

Όμως κατ΄ αναλογία της εξίσωσης υ=αt, μπορούμε να γράψουμε:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t \rightarrow t_1 = \frac{\omega_1}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = \frac{1}{1} s = 1s$$

Ερχόμαστε τώρα στο σημείο επαφής του δίσκου με το οριζόντιο επίπεδο, σημείο Γ. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι αντίστοιχες (όπως παραπάνω) επιταχύνσεις. Για το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης ισχύει:



$$a_{\varepsilon\pi} = a_{\gamma\omega\nu} R = a_{cm}$$

Οπότε η ολική οριζόντια επιτάχυνση είναι:

$$a_x = a_{cm} - a_{\varepsilon\pi} = 0$$

Αλλά τότε η συνολική επιτάχυνση του σημείου Γ είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, με κατακόρυφη διεύθυνση και μέτρο $\alpha_\kappa = \alpha_{cm} = 0{,}8m/s^2$, αντίθετη της επιτάχυνσης του σημείου Β!

7)

Ένας τροχός έχει ακτίνα 0,1 m και κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το κέντρο του τροχού έχει ταχύτητα μέτρου 10 m/s και αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό. Ο τροχός σταματάει αφού μετατοπιστεί κατά 20 m. Να υπολογίσετε

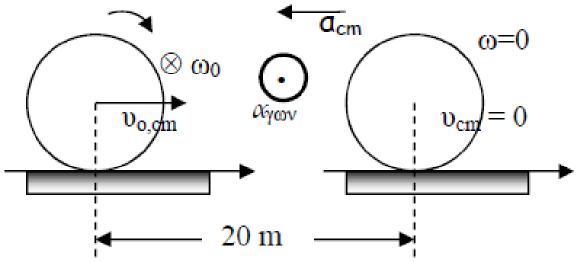
α. το χρόνο κίνησης του τροχού.

β. τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

γ. τον αριθμό των περιστροφών που κάνει ο τροχός από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να σταματήσει.

δ. την ταχύτητα του σημείου της περιφέρειας του τροχού που απέχει από το έδαφος απόσταση 0,2 m, τη χρονική στιγμή t = 2 s.

Λύση



Για τη μεταφορική κίνηση θεωρούμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\upsilon_{0,cm}$ και για τη στροφική κίνηση θεωρούμε σαν θετική φορά τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Η κίνηση του δίσκου είναι σύνθετη ομαλά επιβραδυνόμενη με $\alpha_{\gamma\omega\nu} < 0$. Οι εξισώσεις 4.11 και 4.12: $\begin{array}{l}\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \\ \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2\end{array}$ για τη στροφική κίνηση, μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t \qquad (4.2.1)$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}|\alpha_{\gamma\omega\nu}| t^2 \qquad (4.2.2)$$

Οι εξισώσεις 4.9 και 4.10 $\begin{array}{l}\upsilon = \upsilon_0 + at \\ \Delta s = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2\end{array}$ για τη μεταφορική κίνηση μπορούν να γραφούν

και ως εξής:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{0,cm} - |a_{cm}| t \qquad (4.2.3)$$

$$\Delta x_{cm} = \upsilon_{0,cm} t - \frac{1}{2}|a_{cm}| t^2 \qquad (4.2.4)$$

Από την εκφώνηση δίνονται: R = 0,1 m, $\upsilon_{0,cm}$ = 10 m/s και Δx = 20 m.

Επειδή ο τροχός σταματάει τη χρονική στιγμή t, ισχύουν επιπλέον $\upsilon_{cm} = 0$ και ω = 0.

α. Λύνουμε την εξίσωση 4.2.3 ως προς $|a_{cm}|$: $|a_{cm}| = \dfrac{\upsilon_{0,cm} - \upsilon_{cm}}{t}$ ή $|a_{cm}| = \dfrac{\upsilon_{0,cm}}{t}$

Αντικαθιστούμε στην 4.2.4:

$$\Delta x = \upsilon_{0,cm} t - \frac{1}{2}\frac{\upsilon_{0,cm}}{\cancel{t}} t^{\cancel{2}} \Rightarrow \Delta x = \upsilon_{0,cm} t - \frac{1}{2}\upsilon_{0,cm} t \Rightarrow \Delta x = \frac{\upsilon_{0,cm} t}{2} \Rightarrow t = \frac{2 \cdot \Delta x}{\upsilon_{0,cm}} \Rightarrow$$

$$t = \frac{2 \cdot 20\,m}{10\,m/s} \Rightarrow \boxed{t = 4\,s}.$$

β. Υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού:

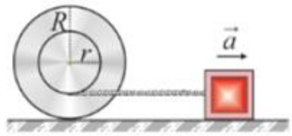
$|a_{cm}| = \dfrac{\upsilon_{0,cm}}{t} \Rightarrow |a_{cm}| = \dfrac{10}{4} m/s^2 \Rightarrow a_{cm} = -2{,}5\,m/s^2$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 4.16

$$a_{cm} = R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = -\frac{2{,}5}{0{,}1} rad/s^2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = -25\,rad/s^2}.$$

γ. Για τον αριθμό των περιστροφών, σύμφωνα και με την πρώτη συνθήκη κύλισης 4.14, ισχύει: $\Delta x = R \cdot N \cdot 2\pi \Rightarrow N = \dfrac{\Delta x}{2\pi R} \Rightarrow N = \dfrac{20}{2\pi \cdot 0,1}\,\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho \Rightarrow N = \dfrac{100}{\pi}\,\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.$

δ. Το σημείο της περιφέρειας του τροχού που απέχει από το έδαφος απόσταση 0,2 m = 2R, είναι το υψηλότερο σημείο του τροχού (σημείο Α στο σχήμα 6). Η ταχύτητά του είναι $\upsilon_A = 2\upsilon_{cm} \xRightarrow{4.2.3} \upsilon_A = 2\left(\upsilon_{0,cm} - |a_{cm}|t\right) \Rightarrow \upsilon_A = 2(10 - 2,5 \cdot 2)\,m/s \Rightarrow \boxed{\upsilon_A = 10\,m/s}$.

8)



Τροχός ακτίνας $R = 0,4$ m και μάζας $m = 1$ kg φέρει εγκοπή ακτίνας $r = R/2$ στην οποία είναι τυλιγμένο αβαρές και μη ελαστικό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται στο μέσον κύβου πλευράς R και μάζας $M = 6$ kg, όπως στο σχήμα Μετακινούμε τον κύβο με σταθερή επιτάχυνση $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$ και ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αρχικά ($t_0 = 0$) τα σώματα είναι ακίνητα και το οριζόντιο τμήμα του νήματος έχει μήκος $l = 3,5R$. Βρείτε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

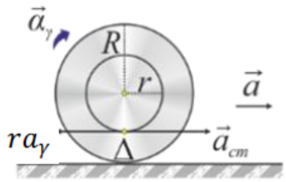
β. Τη χρονική στιγμή που τα δύο σώματα θα έρθουν σε επαφή.

γ. Την ταχύτητα του σημείου του τροχού που θα έρθει σε επαφή με τον κύβο λίγο πριν την κρούση.

δ. Την επιτάχυνση του υψηλότερου σημείου του τροχού όταν η κινητική ενέργεια του κύβου είναι 1,8 J.

ε. Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κύβου λίγο πριν την κρούση.

ΛΥΣΗ



α. Ο τροχός κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση οπότε θα είναι $a_{cm} = \alpha_\gamma R$.

Για το σημείο Δ ισχύει:

$$a_\Delta = a_{cm} - \alpha_\gamma r = a_{cm} - \frac{R}{2}\alpha_\gamma$$

Η επιτάχυνση α του κύβου είναι ίση με την επιτάχυνση του σημείου Δ

$$a = a_\Delta \Rightarrow \alpha = a_{cm} - \frac{R}{2}\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha = a_{cm} - \frac{a_{cm}}{2} = \frac{a_{cm}}{2} \Rightarrow a_{cm} = 2a = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\alpha_\gamma = \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = 10\ \mathrm{rad/s^2}$$

Παρατηρούμε ότι το Κ.Μ. του τροχού έχει διπλάσια επιτάχυνση από την επιτάχυνση του κύβου . Έτσι κάθε στιγμή η μετατόπιση του Κ.Μ. του τροχού θα είναι διπλάσια από την μετατόπιση του κύβου.

β. Όταν έρθουν σε επαφή, το κέντρο μάζας του τροχού έχει διανύσει διάστημα x_1 και ο κύβος έχει διανύσει διάστημα x_2. Ισχύει:

$$x_1 = 2x_2$$

$$x_1 + R = x_2 + l \Rightarrow 2x_2 + R = x_2 + l \Rightarrow x_2 = l - R = 2,5R$$

Είναι:

$$x_2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_2}{\alpha}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5R}{\alpha}} \Rightarrow t = 1s$$

γ. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή $t = 1s$ θα είναι:

$$\upsilon_{cm} = a_{cm} \cdot t = 4 \cdot 1 = 4m/s$$

Η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού θα είναι

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = 4m/s$$

οπότε τη χρονική στιγμή $t = 1$ s η ταχύτητα του σημείου επαφής έχει μέτρο:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + (\omega R)^2} = \sqrt{2}\upsilon_{cm} = \sqrt{2}a_{cm}t_1 \Rightarrow \upsilon = 4\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$$

δ. Το ψηλότερο σημείο έχει δύο συνιστώσες επιτάχυνσης που είναι κάθετες μεταξύ τους

- Την εφαπτομενική επιτάχυνση $a_{\varepsilon\varphi} = 2a_{cm} = 8\,\mathrm{m/s^2}$
- Την κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa = \omega^2 R$

Από την κινητική ενέργεια του κύβου μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του κύβου και στη συνέχεια να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα του τροχού από την οποία θα υπολογίσουμε την α_κ

$$K = \frac{1}{2}M\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{M}}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{3{,}6}{6}} = \sqrt{0{,}6}m/s$$

$$\upsilon_{cm} = 2\upsilon \Rightarrow R\omega = 2\upsilon \Rightarrow \omega = \frac{2\upsilon}{R} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4\upsilon^2}{R^2}$$

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R = \frac{4\upsilon^2}{R^2}R = \frac{4\upsilon^2}{R} = \frac{4 \cdot 0{,}6}{0{,}4} = 6\,\mathrm{m/s^2}$$

Η επιτάχυνση του υψηλότερου σημείου θα έχει μέτρο:

$$a_A = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\kappa^2} \Rightarrow a_A = 10\,\mathrm{m/s^2}$$

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κύβου λίγο πριν την κρούση είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon = Ma\upsilon = Ma^2t_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 48\,\mathrm{J/s}$$

9)

Δίσκος ακτίνας R κατεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης 60° κυλίοντας χωρίς να ολισθαίνει. Κάποια χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου είναι ίση με $υ_{cm}$. Η ταχύτητα την ίδια χρονική στιγμή του σημείου του δίσκου που απέχει τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από το οριζόντιο δάπεδο τότε είναι ίση με:

α. $2υ_{cm}$ **β.** $υ_{cm}\sqrt{2}$ **γ.** $υ_{cm}\sqrt{3}$

ΛΥΣΗ

Σωστό το γ.

Υπόδειξη:

• Σχεδίασε στο σημείο που μας ζητάνε την ταχύτητα του κέντρου μάζας και την γραμμική ταχύτητα.

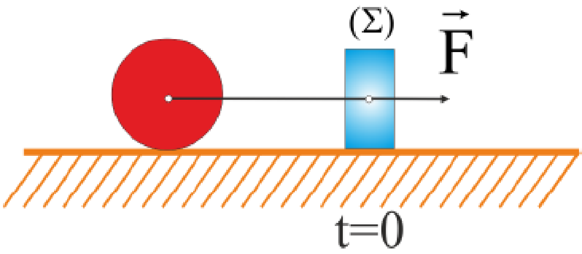
• Πρόσεξε ότι στο ζητούμενο σημείο η ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γραμμική ταχύτητα δεν είναι ομόρροπες.

• Εφάρμοσε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να βρεις το μέτρο της ταχύτητας του σημείου.

• Μην ξεχάσεις τη συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση για τις ταχύτητες.

10)

Σημειακό σώμα Σ μάζας m = 2 kg είναι δεμένο με τη βοήθεια αβαρούς και μη εκτατού νήματος στο κέντρο ενός ομογενούς δίσκου ακτίνας R = 0,2 m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, και ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο δεν εμφανίζει τριβή, σε αντίθεση με το δίσκο που εμφανίζει. Αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο. Τη χρονική στιγμή t = 0 ασκείται στο σημειακό σώμα Σ σταθερή οριζόντια δύναμη F = 10 N με αποτέλεσμα να αρχίσει το σώμα Σ να κινείται και ο δίσκος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s το σώμα Σ έχει διανύσει 4 m. Να βρεθούν:



α. Ο αριθμός των περιστροφών του δίσκου στο χρονικό διάστημα από 0 ως t_1.
β. Η κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1.
γ. Το ρυθμό προσφοράς ενέργειας στο σύστημα την χρονική στιγμή t_1 καθώς και το ρυθμό προσφοράς ενέργειας στο δίσκο την ίδια χρονική στιγμή.
δ. Ποια χρονική στιγμή το σημείο της περιφέρειας του δίσκου που είναι πιο κοντά στο σώμα Σ και ταυτόχρονα απέχει απόσταση R από το έδαφος έχει στιγμιαία επιτάχυνση κατακόρυφης διεύθυνσης;

Λύση

α. Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει για τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του (Δx_{cm}) και τη γωνία στροφής του ($\Delta\theta$) θα ισχύει $\Delta x_{cm} = R\Delta\theta$.

Επειδή το σώμα Σ είναι συνδεδεμένο στο κέντρο του δίσκου, για την επιτάχυνσή του α_Σ και τη μετατόπισή του Δx_Σ θα ισχύουν:

$$\alpha_\Sigma = \alpha_{cm} \text{ και } \Delta x_\Sigma = \Delta x_{cm}$$

Επομένως στο χρονικό διάστημα από 0 ως t_1 το κέντρο μάζας του δίσκου έχει διανύσει 4 m και η γωνία στροφής θα είναι:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x_{cm}}{R} = \frac{4\text{ m}}{0,2\text{ m}} \Rightarrow \Delta\theta = 20\text{ rad}$$

Οπότε ο αριθμός περιστροφών του δίσκου στο ίδιο χρονικό διάστημα θα είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

Αλλιώς $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma \Delta t^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \frac{1}{2}\alpha_\Sigma \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \alpha_\Sigma = \frac{2\cdot\Delta x}{\Delta t^2} = \frac{2\cdot 4}{2^2}\text{m}/\text{s}^2 \Rightarrow \alpha_\Sigma = 2\text{ m}/\text{s}^2 \\ \alpha_\Sigma = \alpha_{cm} = \alpha_\gamma \cdot R \Rightarrow \alpha_\gamma = 10 rad/s^2 \end{array} \right\}$$

Δθ=20 rad

β. Προφανώς για να βρούμε την κινητική ενέργεια του δίσκου ξεχνάμε τύπους…. Εξάλλου η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι εκτός ύλης… !!

Τι μας μένει λοιπόν;;;

Ενεργειακή μελέτη!!

Στο σύστημα προσφέρεται ενέργεια μέσω του έργου της δύναμης F. Είναι:

$$W_F = F \cdot \Delta x = 10 \cdot 4\text{ J} = 40\text{ J}$$

Επειδή η μετακίνηση των δύο σωμάτων γίνεται σε οριζόντιο επίπεδο, δεν έχουμε μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος, οπότε όλη η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα θα είναι η κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων.

Μπορούμε εύκολα να επικαλεστούμε ότι ο δίσκος δεν θα έχει απώλεια ενέργειας κατά τη διάρκεια της κίνησής του, αφού κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει οπότε στο κατώτερο σημείο του ασκείται στατική τριβή (δεν μας νοιάζει η φορά της και δεν μπορούμε να τη σχεδιάσουμε αφού μην ξεχνάμε ότι ο θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης είναι εκτός ύλης) της οποίας το έργο είναι μηδέν αφού ασκείται σε σημείο μηδενικής ταχύτητας, άρα δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της!

Το σώμα Σ εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε η επιτάχυνσή του είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2}\alpha_\Sigma \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \alpha_\Sigma = \frac{2\cdot\Delta x}{\Delta t^2} = \frac{2\cdot 4}{2^2}\text{m}/\text{s}^2 \Rightarrow \alpha_\Sigma = 2\text{ m}/\text{s}^2$$

Η ταχύτητα του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\upsilon_\Sigma = \alpha_\Sigma \cdot t_1 = (2\cdot 2)\text{ m}/\text{s} \Rightarrow \upsilon_\Sigma = 4\text{ m}/\text{s}$$

Και η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K_\Sigma = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_\Sigma^2 \Rightarrow K_\Sigma = \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4^2\right)\text{J} \Rightarrow K_\Sigma = 16\text{ J}$$

Επομένως αφού στο σύστημα προσφέρθηκαν 40 J και το σώμα Σ κράτησε για πάρτη του τα 16 J, τα υπόλοιπα 40 J – 16 J = 24 J απέμειναν στον δίσκο ως κινητική ενέργεια.

Επομένως: $\mathbf{K_\Delta = 24\ J}$

γ. Στο σύστημα ενέργεια προσφέρει η δύναμη F. Ο ζητούμενος ρυθμός προσφοράς ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$P_F = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} = F \cdot \upsilon_\Sigma = 10 \cdot 4\ J/s \Rightarrow P_F = 40\ J/s$$

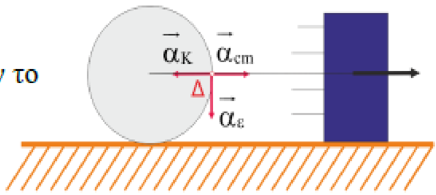
Στο δίσκο ενέργεια προσφέρει η τάση του νήματος. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο Νεύτωνα για το σώμα Σ θα ισχύει:

$$\Sigma F = m\alpha_\Sigma \Rightarrow F - T = m\alpha_\Sigma \Rightarrow T = F - m\alpha_\Sigma = (10 - 2 \cdot 2)\ N \Rightarrow T = 6\ N$$

Ο ζητούμενος λοιπόν ρυθμός προσφοράς ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 στον δίσκο είναι:

$$P_F = \frac{dW}{dt} = \frac{T \cdot dx}{dt} = T \cdot \upsilon_\Sigma = 6 \cdot 4\ J/s \Rightarrow P_F = 24\ J/s$$

δ. Το ζητούμενο σημείο Δ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Οι επιταχύνσεις και οι κατευθύνσεις που χαρακτηρίζουν το σημείο αυτό φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

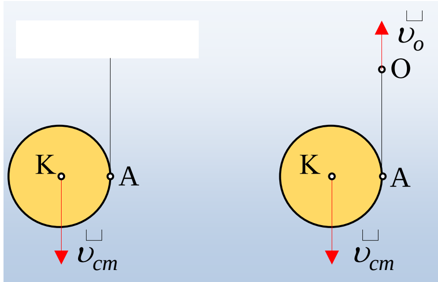
Προκειμένου το σημείο Δ να έχει στιγμιαία επιτάχυνση κατακόρυφης διεύθυνσης, θα πρέπει να υπάρχει μόνο η επιτρόχιος επιτάχυνση.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου να γίνει ίση με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου. Δηλαδή:

$$\alpha_{cm} = \alpha_K \Rightarrow \alpha_{cm} = \omega^2 R \Rightarrow \alpha_{cm} = (\alpha_\gamma \cdot t_2)^2 R \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{\alpha_{cm}}{\alpha_\gamma^2 R}} = \sqrt{\frac{2}{10^2 \cdot 0,2}}\ s = \sqrt{\frac{1}{10}}\ s \Rightarrow t_2 = 0,1\sqrt{10}\ s$$

όπου $\alpha_\gamma = \alpha_{cm}/R = 10\ rad/s^2$.

11) Γύρω από έναν κύλινδρο ακτίνας R=0,1m τυλίγουμε ένα νήμα, το άλλο άκρο του οποίου δένουμε στο ταβάνι. Αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει, όποτε έχουμε τη δημιουργία ενός γιο-γιο, το οποίο στρέφεται αριστερόστροφα, ενώ πέφτει κατακόρυφα και σε μια στιγμή το κέντρο K του κυλίνδρου, έχει ταχύτητα μέτρου $υ_{cm}$=2m/s.



i) Για την θέση αυτή να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα του σημείου A του κυλίνδρου, όπου αρχίζει να ξετυλίγεται το νήμα.

β) Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

γ) Η ταχύτητα του σημείου B, του αντιδιαμετρικού σημείου του A.

δ) Η επιτάχυνση του σημείου A.

ii) Ελευθερώνουμε το νήμα από το ταβάνι και πιάνουμε με το χέρι μας το άκρο O του νήματος. Αφήνουμε ξανά τον κύλινδρο να πέσει, ενώ τραβάμε προς τα πάνω το άκρο O του νήματος. Τη στιγμή που ξανά το κέντρο K του κυλίνδρου έχει ταχύτητα $υ_{cm}$=2m/s, με φορά προς τα κάτω, έχει και κατακόρυφη επιτάχυνση $α_{cm}$=4m/s^2, επίσης με φορά προς τα κάτω, το άκρο O του νήματος έχει ταχύτητα προς τα πάνω με μέτρο $υ_o$=4m/s (η ταχύτητα που κινούμε το χέρι μας) και επιτάχυνση $α_o$=8m/s^2 με κατεύθυνση επίσης προς τα πάνω. Για τη στιγμή αυτή:

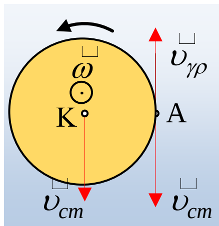
α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

β) Να υπολογισθεί η ταχύτητα και η κατακόρυφη επιτάχυνση του σημείου B.

Απάντηση:

i) Θεωρούμε την κίνηση του κυλίνδρου (γιο-γιο) σύνθετη. Μια μεταφορική, με ταχύτητα ίση με αυτή του κέντρου K και μια στροφική, γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που περνά από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου.

α) Το νήμα παραμένει ακίνητο, συνεπώς και κάθε σημείο του έχει μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε και το σημείο του νήματος που έρχεται σε επαφή με τον κύλινδρο, στο σημείο A που ξετυλίγεται το νήμα, έχει μηδενική ταχύτητα, ίση και με την ταχύτητα του σημείου A του κυλίνδρου.

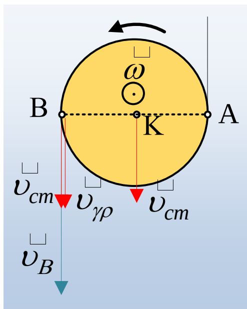


β) Το σημείο A, λόγω της μεταφορικής κίνησης έχει ταχύτητα ίση με την $υ_{cm}$ του κέντρου του κυλίνδρου, ενώ λόγω της στροφικής κίνησης έχει ταχύτητα $υ_{γρ}$=ωR, κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε:

$$υ_{γρ} - υ_{cm} = 0 \rightarrow ωR = υ_{cm} \rightarrow$$

$$ω = \frac{υ_{cm}}{R} = \frac{2}{0,1} rad/s = 20 rad/s$$

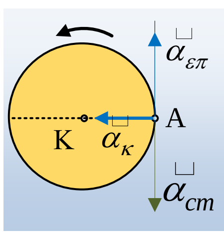
γ) Με την ίδια λογική το αντιδιαμετρικό του A, σημείο B, έχει ταχύτητα, λόγω μεταφορικής κίνησης την ταχύτητα $υ_{cm}$ και λόγω της στροφικής κίνησης την $υ_{γρ}$, ίσου μέτρου, με φορά επίσης προς τα κάτω.



Αλλά τότε η ταχύτητα του σημείου B είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και μέτρο:

$$υ_B = υ_{cm} + υ_{γρ} = 2υ_{cm} = 4m/s.$$

δ) Αλλά και για τις επιταχύνσεις του σημείου A, ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Έτσι έχει μια κατακόρυφη επιτάχυνση ίση με $α_{cm}$, λόγω μεταφορικής κίνησης, αλλά εκτελεί ταυτόχρονα και μια επιταχυνόμενη κίνηση, με αποτέλεσμα να έχει μια συνιστώσα επιτάχυνση $\vec{a}_{επ}$, εφαπτόμενη



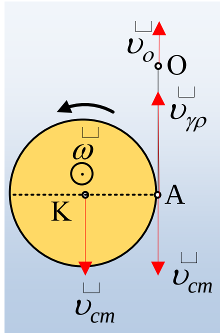
στην τροχιά, υπεύθυνη για την αλλαγή στο μέτρο της γραμμικής ταχύτητας και μια κεντρομόλο επιτάχυνση α_κ, με φορά προς το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς, όπως στο σχήμα. Για τα **μέτρα** τους έχουμε:

$$\upsilon_{\gamma\rho} - \upsilon_{cm} = 0 \rightarrow \frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} \rightarrow \alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{cm}$$

$$a_\kappa = \omega^2 R = 20^2 \cdot 0{,}1 m/s^2 = 40 m/s^2.$$

Έτσι τελικά η επιτάχυνση του σημείου Α, είναι μόνο η οριζόντια επιτάχυνσή του ίση με την α_κ.

ii) Όλα τα σημεία του νήματος έχουν την ίδια επιτάχυνση και την ίδια ταχύτητα με το άκρο του Ο, το σημείο που κινούμε με το χέρι μας. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες του σημείου Α, όπου υ_{cm} η ταχύτητα λόγω μεταφορικής και $\upsilon_{\gamma\rho}$ η ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης.



α) Για την ταχύτητα $\upsilon_A = \upsilon_o$ ισχύει:

$$\upsilon_o = \upsilon'_{\gamma\rho} - \upsilon'_{cm} \quad (1)$$
$$\rightarrow \upsilon_o = \omega' R - \upsilon'_{cm} \rightarrow$$
$$\omega' = \frac{\upsilon_o + \upsilon'_{cm}}{R} = \frac{4+2}{0{,}1} rad/s = 60 rad/s$$

β) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_o = \upsilon'_{\gamma\rho} - \upsilon'_{cm} \quad \rightarrow \frac{d\upsilon_o}{dt} = \frac{d\upsilon'_{\gamma\rho}}{dt} - \frac{d\upsilon'_{cm}}{dt} \rightarrow$$
$$a_o = a'_{\varepsilon\pi} - \alpha'_{cm} \rightarrow$$
$$a'_{\varepsilon\pi} = a_o + \alpha'_{cm} = 8 m/s^2 + 4 m/s^2 = 12 m/s^2.$$

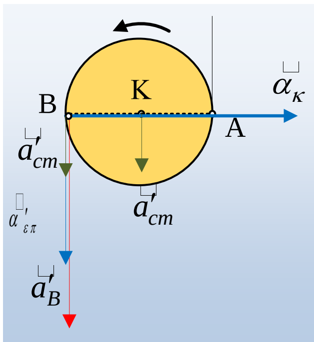
Όπου $\alpha_{\varepsilon\pi}$ η επιτρόχια επιτάχυνση ενός σημείου στην περιφέρεια του κυλίνδρου, υπεύθυνη για την αλλαγή του μέτρου της γραμμικής του ταχύτητας $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega R$.

Ερχόμενοι τώρα στο σημείο Β, με βάση το σχήμα της ερώτησης i) γ) έχουμε για την ταχύτητά του:

$$\upsilon'_B = \upsilon'_{cm} + \upsilon'_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \omega' R = 2 m/s + 60 \cdot 0{,}1 m/s = 8 m/s$$

Με φορά επίσης προς τα κάτω.

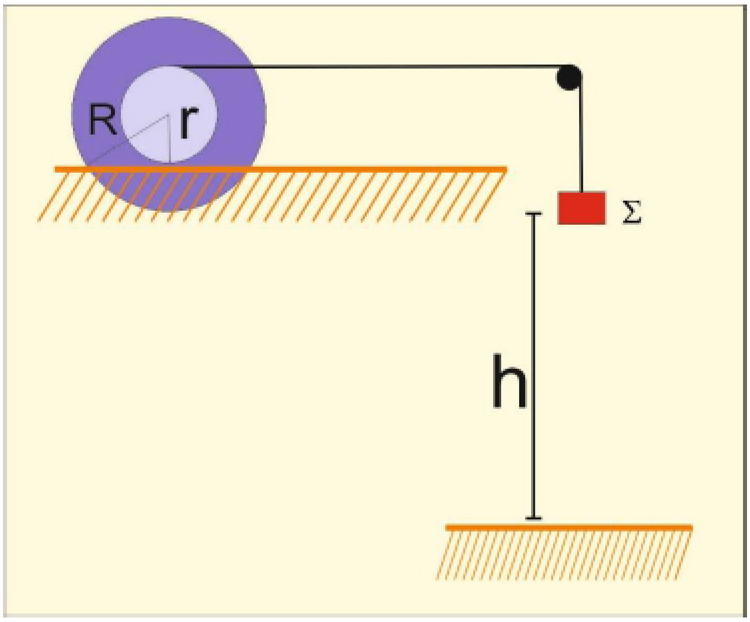
Εξάλλου, στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι επιταχύνσεις του σημείου Β, όπου η κεντρομόλος α_κ είναι οριζόντια. Έτσι για το μέτρο της κατακόρυφης επιτάχυνσης του σημείου Β, με φορά προς τα κάτω, θα έχουμε:



$$\alpha'_B = \alpha'_{\varepsilon\pi} + \alpha'_{cm} \rightarrow$$
$$\alpha'_B = 12 m/s^2 + 4 m/s^2 = 16 m/s^2.$$

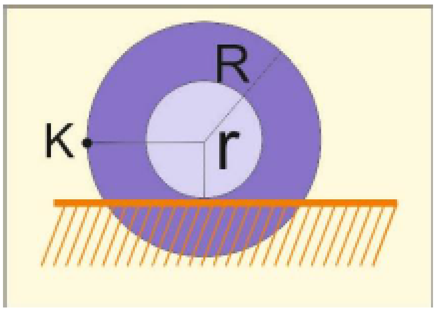
12)

Ο δίσκος του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα R = 0,4 m. Σε απόσταση r από το κέντρο του δίσκου είναι χαραγμένο αυλάκι γύρω από το οποίο έχει τυλιχτεί αβαρές και μη εκτατό νήμα, το ελεύθερο άκρο του οποίου καταλήγει μέσω καρφιού σε σώμα Σ μάζας m = 2 kg. Το σώμα Σ απέχει αρχικά απόσταση h από το έδαφος.



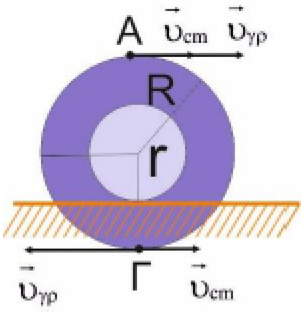
Αρχικά το σύστημα συγκρατείται ακίνητο και το νήμα είναι τεντωμένο. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί οπότε το σώμα Σ αρχίζει να κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση και ο δίσκος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο έχοντας συνεχώς σε επαφή με το έδαφος το αυλάκι του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή t_1 = 3 s που το σώμα Σ φτάνει στο έδαφος, η ορμή του έχει μέτρο p_1 = 24 kg·m/s. Διαπιστώνεται ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του δίσκου, ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των δύο αντιδιαμετρικών σημείων της κατακόρυφης διαμέτρου του δίσκου είναι ίσος με 3. Να βρείτε:

α. Την ακτίνα r του αυλακιού του δίσκου.
β. Την ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1.
γ. Το μήκος νήματος που ξετυλίγεται από το δίσκο στη διάρκεια του τελευταίου δευτερολέπτου της κίνησης του Σ.
δ. Ποια χρονική στιγμή το σημείο Κ της περιφέρειας του δίσκου και το οποίο απέχει απόσταση r από το έδαφος, όπως φαίνεται στο σχήμα, έχει επιτάχυνση που σχηματίζει γωνία 45° με το οριζόντιο δάπεδο; Πόσο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Κ;



ε. Ποιο ποσοστό της μείωσης της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ μετατράπηκε σε κινητική του σώματος Σ το χρονικό διάστημα από 0 ως 3 s;
στ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ ελάχιστα πριν φτάσει στο έδαφος;
ζ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του σώματος Σ ελάχιστα πριν φτάσει στο έδαφος;
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητα $g = 10\ m/s^2$.

Λύση



α. Τα αντιδιαμετρικά σημεία Α και Γ της κατακόρυφης διαμέτρου του δίσκου καθώς και οι ταχύτητές τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση για το δίσκο ισχύει η συνθήκη: $\upsilon_{cm} = \omega r$

Το ανώτερο σημείο Α του δίσκου έχει ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \omega r + \omega R \ (1)$$

Το σημείο Γ του δίσκου έχει ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_{\gamma\rho} - \upsilon_{cm} = \omega R - \omega r \ (2)$$

Επειδή ο λόγος τους είναι ίσος με 3 προκύπτει:

$$\frac{\upsilon_A}{\upsilon_\Gamma} = \frac{\omega R + \omega r}{\omega R - \omega r} \Rightarrow 3 = \frac{\omega R + \omega r}{\omega R - \omega r} \Rightarrow r = \frac{R}{2} = 0,2\ m$$

β. Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος Σ είναι:

$$p_1 = m \cdot \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{p_1}{m} = \frac{24}{2} m/s \Rightarrow \upsilon_1 = 12\ m/s$$

Η ταχύτητα του σώματος Σ είναι ίση κατά μέτρο με την ταχύτητα του σημείου του δίσκου στο οποίο δένεται το νήμα. Επομένως:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \omega r + \omega r = 2\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon_1}{2} = 6\ m/s$$

γ. Το μήκος νήματος που ξετυλίγεται στη διάρκεια του τρίτου δευτερολέπτου της κίνησής του σώματος Σ είναι ίσο με:

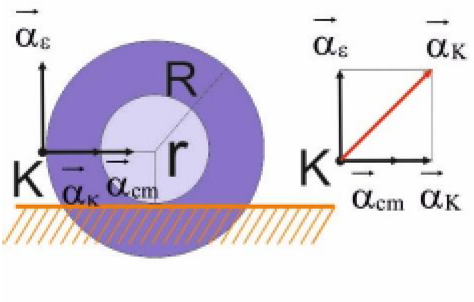
$$L = r \cdot \Delta\theta = r \cdot \left(\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot 3^2 - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot 2^2\right) (1)$$

Ισχύει:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{\upsilon_{cm}}{t_1} = 2\ m/s^2 \ \text{και}\ \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} r \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 10\ rad/s^2$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει: $\mathbf{L = 5\ m}$

δ. Το σημείο Κ του δίσκου έχει τις επιταχύνσεις που φαίνονται στο σχήμα. Για το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Κ ισχύει:



$$\alpha_K = \sqrt{(\alpha_K + \alpha_{cm})^2 + \alpha_\varepsilon{}^2}$$

Για να σχηματίζει λοιπόν η επιτάχυνση του σημείου Κ γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση θα πρέπει:

$\alpha_{cm} + \alpha_K = \alpha_\varepsilon \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} r + \alpha_\kappa = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow \alpha_\kappa = \alpha_{\gamma\omega\nu} r \Rightarrow \alpha_\kappa = 2\ m/s^2$

Δηλαδή $\alpha_\kappa = \omega^2 R = 2\ m/s^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{5}\ rad/s$

Και επειδή $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι $t = 0{,}1\sqrt{5}\ s$

Με αντικατάσταση για το μέτρο της ζητούμενης επιτάχυνσης προκύπτει:

$$\alpha_K = 4\sqrt{2}\ m/s^2$$

ε. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\alpha\% = \frac{K_\Sigma}{|\Delta U|} \cdot 100\%$$

Από 0 ως 3 s το ύψος h που μετακινείται το σώμα Σ είναι:

$$h = \frac{1}{2}\alpha_\Sigma t_1^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2\right) m \Rightarrow h = 18\ m$$

Η δυναμική ενέργεια του σώματος Σ μειώνεται κατά $|\Delta U| = mgh = 360\ J$.

Η κινητική ενέργεια του σώματος την ίδια χρονική στιγμή είναι:

$$K_\Sigma = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_1{}^2 \Rightarrow K_\Sigma = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12^2\right) J \ \Rightarrow K_\Sigma = 144\ J$$

Τελικά το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\alpha\% = \frac{K_\Delta}{|\Delta U|} \cdot 100\% = \frac{144\ J}{360\ J} \cdot 100\% = 40\%$$

στ. Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ ισχύει:

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_\Sigma = \frac{\Sigma W}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon_1 = (m \cdot \alpha_\Sigma)\upsilon_1$$

Όπου $\upsilon_1 = 12\ m/s$ και $\alpha_\Sigma = 2\alpha_{cm} = 4\ m/s^2$.

Επομένως:

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_\Sigma = \Sigma F \cdot \upsilon_1 = (2 \cdot 4) \cdot 12\ J/s \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +96\ J/s$$

στ. Για το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του σώματος Σ ισχύει:

$$\left(\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt}\right)_{\Sigma} = \left(\frac{dK}{dt}\right)_{\Sigma} + \left(\frac{dU}{dt}\right)_{\Sigma} \quad (2)$$

Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ τον υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Για το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας θα ισχύει:

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_{\Sigma} = \frac{-W_B}{dt} = \frac{-mg\cdot dy}{dt} = -m\cdot g\cdot \upsilon_1 = -2\cdot 10\cdot 12\ J/s = -240\ J/s$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει:

$$\left(\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt}\right)_{\Sigma} = -144\ J/s$$

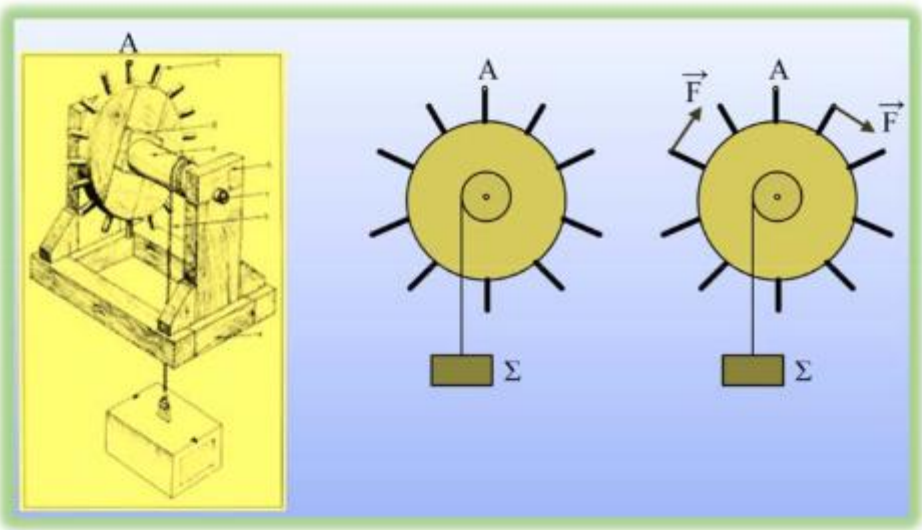
Σχόλιο: *Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας θα μπορούσε να προσδιοριστεί και μέσω της ισχύος της τάσης του νήματος. Δηλαδή:*

$$\left(\frac{dE_{\mu\eta\chi}}{dt}\right)_{\Sigma} = -T\cdot \upsilon_1$$

Στην περίπτωση αυτή η τάση του νήματος θα υπολογιζόταν από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του σώματος Σ.

13)

Στο βαρούλκο του σχήματος, η ακτίνα του τύμπανου γύρω από το οποίο τυλίγεται το σχοινί είναι r=0,1m, ενώ η απόσταση του άκρου κάθε χειρολαβής από τον άξονα περιστροφής είναι L=0,5m.



i) Ασκώντας δυο δυνάμεις ίσου μέτρου F=20N, στα άκρα δύο χειρολαβών, κάθετα προς αυτές όπως στο σχήμα, το σώμα Σ ισορροπεί. Μεταξύ του τύμπανου και του άξονα περιστροφής δεν εμφανίζονται τριβές. Ποια η μάζα του σώματος Σ;

Αυξάνοντας το μέτρο των δυνάμεων F'>F=20N, στα άκρα των χειρολαβών, το βαρούλκο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση. Το νήμα αρχίζει να τυλίγεται στο τύμπανο, χωρίς να ολισθαίνει σε αυτό. Αν η ροπή της δύναμης που ασκεί το νήμα στο τύμπανο έχει μέτρο τ=22Nm, να υπολογίσετε:

ii) την επιτάχυνση του σώματος Σ καθώς και την ταχύτητά του Δt=2s μετά την έναρξη της κίνησης.

Την ίδια στιγμή, δηλαδή την t=2s μετά την έναρξη της κίνησης, να υπολογίσετε:

iii) Την ταχύτητα και την κεντρομόλο επιτάχυνση του άκρου Α της χειρολαβής

iv) Τον ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του άκρου Α καθώς και τον αριθμό περιστροφών που έχει διαγράψει το βαρούλκο, μέχρι τη στιγμή εκείνη.

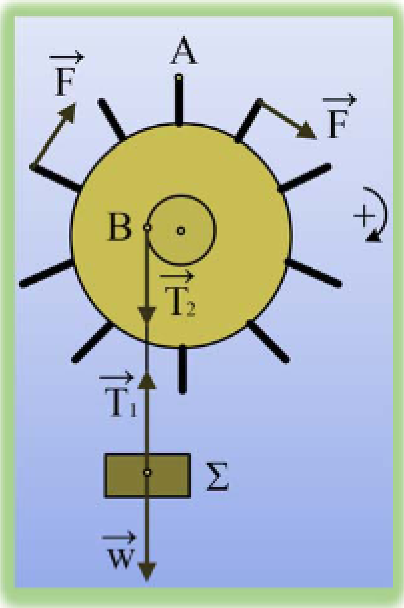
Δίνεται $g=10m/s^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

i) Εφόσον το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow\vec{T}_1+\vec{W}=\vec{0}\Rightarrow\vec{T}_1=-\vec{W}\Rightarrow T_1=W=Mg$

Το τεντωμένο νήμα, ασκεί στο τύμπανο δύναμη: $\vec{T}_2=-\vec{T}_1\Rightarrow T_2=T_1=W=Mg$

Από την περιστροφική ισορροπία του βαρούλκου έχουμε:



$$\Sigma\tau_{\alpha\xi}=0\Rightarrow F\cdot L+F\cdot L-T_2r=0\Rightarrow 2F\cdot L=Mgr\Rightarrow$$

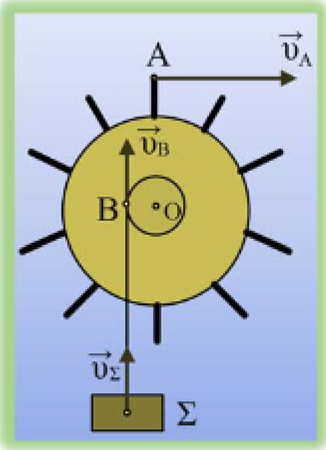
$$\Rightarrow M=\frac{2F\cdot L}{gr}\Rightarrow M=\frac{2\cdot 20\cdot 0,5}{10\cdot 0,1}Kg\Rightarrow M=20Kg$$

ii) Εφόσον η ροπή της δύναμης που ασκεί το νήμα στο τύμπανο έχει μέτρο τ=22Nm, έχουμε:

$$\tau_{T_2}=T_2\cdot r\Rightarrow T_2=\frac{\tau_{T_2}}{r}\Rightarrow T_2=\frac{22}{0,1}N\Rightarrow T_2=220N$$

Δύναμη ίσου μέτρου, ασκεί το νήμα στο σώμα Σ, το οποίο αποκτά επιτάχυνση:

$$\Sigma F=T_1-Mg=Ma_\Sigma\Rightarrow a_\Sigma=\frac{T_1-Mg}{M}\Rightarrow a_\Sigma=\frac{220-200}{20}\frac{m}{s^2}\Rightarrow a_\Sigma=1\frac{m}{s^2}$$



Η ταχύτητα του Σ, Δt=2s μετά την έναρξη της κίνησης, είναι:

$$\upsilon_\Sigma=a\Delta t\Rightarrow\upsilon_\Sigma=2\frac{m}{s}$$

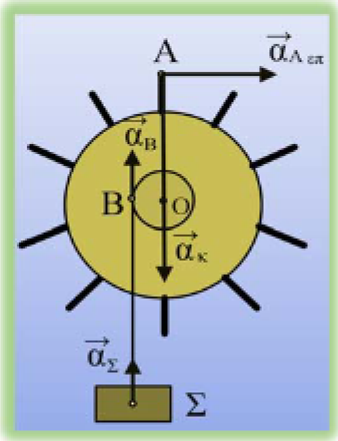
Το νήμα αρχίζει να τυλίγεται στο τύμπανο, χωρίς να ολισθαίνει σε αυτό, οπότε έχει ταχύτητα ίση κατά μέτρο με την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τύμπανου:

$$\upsilon_\Sigma=\upsilon_B=\omega r\Rightarrow\omega=\frac{\upsilon_B}{r}\Rightarrow\omega=\frac{2}{0,1}\frac{rad}{s}\Rightarrow\omega=20\frac{rad}{s}$$

iii) Η ταχύτητα και η κεντρομόλος επιτάχυνση του άκρου Α της χειρολαβής εκείνη τη στιγμή είναι:

$$\upsilon_A = \omega L \Rightarrow \upsilon_A = 20\frac{rad}{s}\cdot 0,5m \Rightarrow \upsilon_A = 10\frac{m}{s}$$

$$a_K = \omega^2 \cdot L \Rightarrow a_K = 20^2 \cdot 0,5m \Rightarrow a_K = 200\frac{m}{s^2}$$



iv) Από τη σχέση $\upsilon_B=\upsilon_\Sigma=\omega\cdot r$, με παραγώγιση έχουμε:

$$\frac{d\upsilon_\Sigma}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_\Sigma = a_{\gamma\omega\nu} r \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_\Sigma}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{0,1}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 10\frac{rad}{s^2}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του άκρου Α, δηλαδή η επιτρόχιος επιτάχυνση του άκρου Α, είναι:

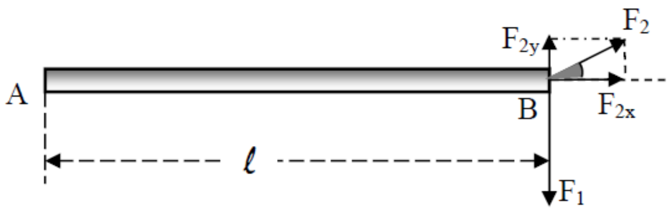
$$a_{\varepsilon\pi} = \frac{d\upsilon_A}{dt} = \frac{d(\omega L)}{dt} = L\frac{d\omega}{dt} = a_{\gamma\omega\nu}\cdot L \Rightarrow a_{\varepsilon\pi} = 10\frac{rad}{s^2}\cdot 0,5m \Rightarrow a_{\varepsilon\pi} = 5\frac{m}{s^2}$$

Ο αριθμός περιστροφών που έχει διαγράψει το βαρούλκο μέχρι εκείνη τη στιγμή είναι:

$$\Delta\varphi = N\cdot 2\pi = \frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}\Delta t^2 \Rightarrow N\cdot 2\pi = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2^2 = 20 \Rightarrow N = \frac{10}{\pi}\ \text{περιστροφές}$$

14)

Μια αβαρής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ = 6 m μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α. Στο άκρο Β της ράβδου ασκούνται δύο οριζόντιες δυνάμεις με μέτρα F_1 = 10 N και F_2 = 2 N. Η δύναμη F_1 είναι κάθετη στη ράβδο, ενώ η F_2 σχηματίζει γωνία 30^0 με τον άξονα της ράβδου και γωνία 120^0 με τον φορέα της F_1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή των δύο δυνάμεων ως προς το άκρο Α.



Λύση

Θεωρούμε σα θετική φορά περιστροφής την αριστερόστροφη (την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού).

Η δύναμη F_1 τείνει να περιστραφεί γύρω από το σημείο Α δεξιόστροφα.

Επομένως για την αλγεβρική τιμή της ροπής της δύναμης F_1 ως προς το σημείο Α ισχύει $\tau_{F_1}{}^{(A)} = -F_1 \cdot \ell$. (1)

Για να υπολογίσουμε τη ροπή της δύναμης F_2, την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες, μία κατά τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου και μία σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο. Ισχύει ότι $\vec{\tau}_{F_2}{}^{(A)} = \vec{\tau}_{F_{2x}}{}^{(A)} + \vec{\tau}_{F_{2y}}{}^{(A)}$. (2)

Η ροπή της συνιστώσας F_{2x} είναι ίση με μηδέν γιατί ο φορέας της διέρχεται από το σημείο Α.

Για την αλγεβρική τιμή της ροπής της συνιστώσας F_{2y} ισχύει ότι $\tau_{F_{2y}} = +F_{2y}\ell$. (3)

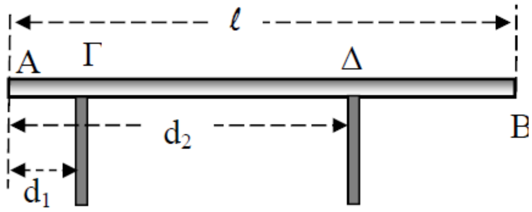
Για τη συνιστώσα F_{2y} ισχύει $F_{2y} = F_2$ ημ30^0. Άρα η 2 με τη βοήθεια και της 3 γράφεται, αλγεβρικά, $\tau_{F_2} = 0 + F_2 \cdot ημ30^0 \cdot \ell$.

Για τη συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο ισχύει: $\tau_{ολ} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} \stackrel{1}{\Rightarrow}$

$$\tau_{ολ} = -F_1 \cdot \ell + F_2 \cdot \ell \cdot ημ30^0 \Rightarrow \tau_{ολ} = -10N \cdot 6m + 2N \cdot 6m \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \tau_{ολ} = (-60+6)Nm \Rightarrow$$

$\tau_{ολ} = -54Nm$. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ράβδος ΑΒ, εξαιτίας των δύο δυνάμεων, θα περιστραφεί δεξιόστροφα.

15)



Μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους ℓ = 8 m και βάρους w = 1000 N, στηρίζεται σε δύο σημεία της Γ και Δ, τα οποία απέχουν από το άκρο της Α αποστάσεις d_1 = 1 m και d_2 = 5 m, αντίστοιχα.

Ένας άνθρωπος βάρους w_1 = 1000 N βρίσκεται ακίνητος στο άκρο της Α. Η δοκός ισορροπεί οριζόντια. Να υπολογίσετε

α. τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα υποστηρίγματα στη δοκό, στα σημεία Γ και Δ.

β. Μέχρι ποια απόσταση από το άκρο Β μπορεί να βαδίσει ο άνθρωπος χωρίς να ανατραπεί η δοκός;

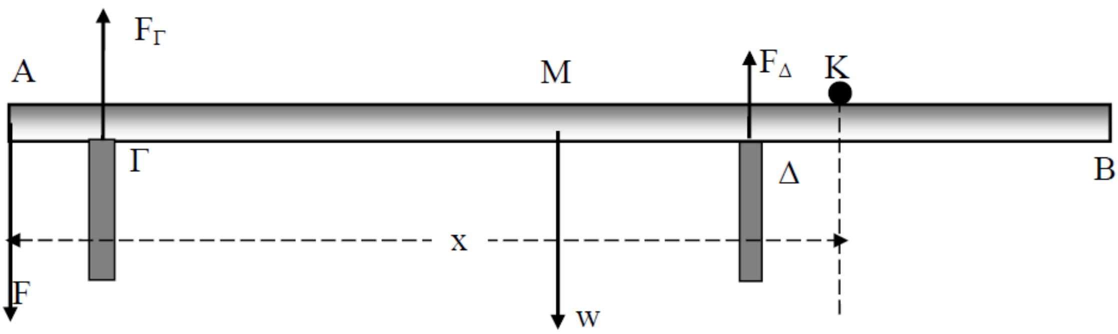
Λύση

α. Αρχικά πρέπει να σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό.

Στη δοκό ασκούνται: Μία δύναμη εξ αποστάσεως, που είναι το βάρος της w, με σημείο εφαρμογής το μέσο της δοκού και τρεις δυνάμεις εξ επαφής· μία από τα πόδια του ανθρώπου στο σημείο Α και δύο από τα υποστηρίγματα στα σημεία Γ και Δ.

Η δύναμη F που ασκείται στη δοκό από τα πόδια του ανθρώπου είναι κατά μέτρο ίση με τη δύναμη F΄ που ασκείται στον άνθρωπο από τη δοκό, ως δράση – αντίδραση. Επειδή ο άνθρωπος, ως σημειακό αντικείμενο, ισορροπεί υπό την επίδραση δύο αντίρροπων δυνάμεων, του βάρους του w_1 και της F΄, πρέπει να ισχύει η συνθήκη ισορροπίας ΣF = 0. Συνεπώς πρέπει F΄ - w_1 = 0 ή F΄ = w_1. Επειδή όμως F΄ = F προκύπτει F = w_1.

Οι δυνάμεις στα σημεία Γ και Δ, ως δυνάμεις στήριξης, είναι κατακόρυφες (κάθετες στη δοκό) με φορά προς τα πάνω, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Επειδή η δοκός ισορροπεί πρέπει να ισχύει Στ = 0 ως προς οποιοδήποτε άξονα ή σημείο. Επιλέγουμε ένα σημείο από το οποίο να διέρχεται μία από τις άγνωστες δυνάμεις, ώστε η ροπή της ως προς το σημείο αυτό να είναι ίση με μηδέν. Έστω ότι επιλέγουμε το σημείο Δ από το οποίο διέρχεται η άγνωστη δύναμη F_Δ.

$\Sigma\tau^{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \tau_F^{(\Delta)} + \tau_{F_\Gamma}^{(\Delta)} + \tau_w^{(\Delta)} + \cancel{\tau_{F_\Delta}^{(\Delta)}} = 0 \Rightarrow \tau_{w_1}^{(\Delta)} + \tau_{F_\Gamma}^{(\Delta)} + \tau_w^{(\Delta)} = 0$. Ορίζουμε σα θετική φορά περιστροφής την αριστερόστροφη, οπότε

$$+F\cdot(A\Delta) - F_\Gamma\cdot(\Gamma\Delta) + w\cdot(M\Delta) = 0 \Rightarrow w_1\cdot d_2 - F_\Gamma\cdot(d_2 - d_1) + w\cdot\left(d_2 - \frac{\ell}{2}\right) \Rightarrow$$

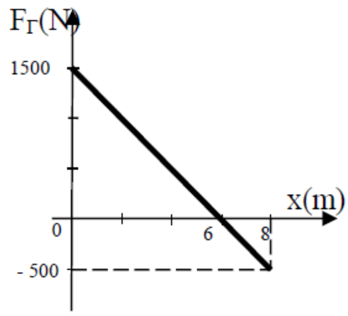
$$F_\Gamma\cdot(5m - 1m) = 1000N\cdot 5m + 1000N\cdot\left(5m - \frac{8m}{2}\right) \Rightarrow F_\Gamma\cdot 4m = 5000Nm + 1000Nm \Rightarrow$$

$\boxed{F_\Gamma = 1500Nm}$.

Στη συνέχεια μπορούμε να επιλέξουμε άλλο σημείο π.χ το Γ και να εφαρμόσουμε ξανά τη συνθήκη Στ = 0 ως προς το σημείο αυτό ή να εφαρμόσουμε τη συνθήκη ΣF = 0. Επιλέγουμε εδώ το δεύτερο τρόπο.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F + w - F_\Gamma - F_\Delta = 0 \Rightarrow F_\Delta = w_1 + w - F_\Gamma \Rightarrow \boxed{F_\Delta = 500N}$$

β. Όταν ο άνθρωπος βαδίσει προς το άλλο άκρο της δοκού, το μέτρο της δύναμης F_Γ από το στήριγμα θα αρχίσει να μειώνεται συνεχώς. Αφού ο άνθρωπος περάσει το σημείο Δ, υπάρχει περίπτωση η δύναμη F_Γ να μηδενιστεί, οπότε η δοκός θα αρχίσει να ανατρέπεται. Έστω Κ ένα σημείο στο οποίο βρίσκεται ο άνθρωπος πριν η δοκός ανατραπεί (αν ανατραπεί) και έστω x η απόσταση ΚΑ. Θα υπολογίσουμε τη δύναμη F_Γ σε συνάρτηση με το x. Επειδή η δοκός εξακολουθεί να ισορροπεί οριζόντια, θα ισχύει η συνθήκη Στ = 0. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη αυτή ως προς το σημείο Δ: $\Sigma\tau^{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \tau_F^{(\Delta)} + \tau_{F_\Gamma}^{(\Delta)} + \tau_w^{(\Delta)} + \cancel{\tau_{F_\Delta}^{(\Delta)}} = 0 \Rightarrow$



$$\tau_{w_1}^{(\Delta)} + \tau_{F_\Gamma}^{(\Delta)} + \tau_w^{(\Delta)} = 0 \Rightarrow -w_1 \cdot (x - d_2) - F_\Gamma \cdot (d_2 - d_1) + w \cdot \left(d_2 - \frac{\ell}{2}\right) = 0 \overset{(S.I)}{\Rightarrow}$$

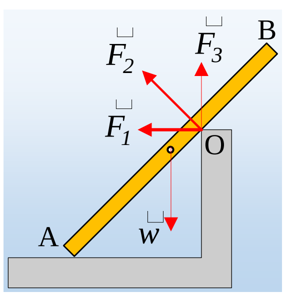
$$-1000 \cdot (x - 5) - F_\Gamma \cdot (5 - 1) + 1000 \cdot \left(5 - \frac{8}{2}\right) = 0 \Rightarrow 4F_\Gamma = -1000x + 6000 \Rightarrow F_\Gamma = -250x + 1500$$

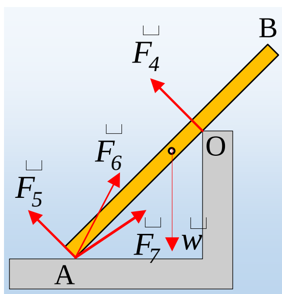
(S.I.)

Για να μην ανατραπεί η δοκός πρέπει να ισχύει $F_\Gamma \geq 0 \Rightarrow -250x + 1500 \geq 0 \Rightarrow x \leq 6m$.

Επομένως ο άνθρωπος μπορεί να βαδίσει πάνω στη δοκό χωρίς αυτή να ανατραπεί μέχρι ένα σημείο Κ το οποίο απέχει από το άκρο Α απόσταση το πολύ 6 m ή το λιγότερο απόσταση $\ell - x = 2\,m$, από το άκρο Β της δοκού.

16) Μια ομογενής ράβδος, ισορροπεί όπως στο σχήμα, όπου το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο, στηριζόμενη σε σκαλοπάτι στο σημείο Ο.





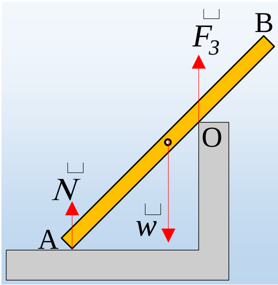
i) Ποια από τις δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο πρώτο σχήμα, ασκείται στην ράβδο από το σκαλοπάτι, όπου η F_1 είναι οριζόντια, η F_2 είναι κάθετη στη ράβδο και η F_3 είναι κατακόρυφη.

ii) Αν το οριζόντιο επίπεδο δεν ήταν λείο, και από το σκαλοπάτι ασκείται στη ράβδο η δύναμη F_4, όπως στο δεύτερο σχήμα, ποια από τις δυνάμεις F_5, F_6 και F_7 ασκείται από το επίπεδο, στο άκρο Α της ράβδου;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

i) Η ράβδος δέχεται από το λείο οριζόντιο επίπεδο, μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{N}$, το βάρος $\vec{w}$, το οποίο είναι επίσης κατακόρυφη δύναμη, οπότε και η δύναμη από το σκαλοπάτι, πρέπει να είναι και αυτή κατακόρυφη, όπως στο διπλανό σχήμα.

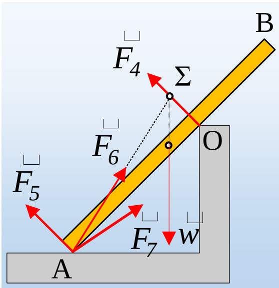


Πράγματι από την συνθήκη ισορροπίας της ράβδου, πρέπει:

$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow \vec{N}+\vec{w}+\vec{F}_3=0 \rightarrow$$
$$\vec{F}_3=-\left(\vec{N}+\vec{w}\right)$$

Η δύναμη F_3 δηλαδή είναι αντίθετη από την συνισταμένη βάρους και κάθετης αντίδρασης, η οποία είναι κατακόρυφη, ως συνισταμένη δύο κατακόρυφων δυνάμεων.

ii) Εκτός από την παραπάνω συνθήκη (ΣF=0) για την ισορροπία της ράβδου, θα πρέπει να ισχύει και η 2η συνθήκη, με τις ροπές. Αφού η ράβδος ισορροπεί, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι ίσο με μηδέν. Αν λοιπόν επιλέξουμε ως σημείο υπολογισμού των ροπών το σημείο Σ, σημείο τομής των φορέων του βάρους και της δύναμης F_4, θα ισχύει:



$$\Sigma\tau_{\Sigma}=0 \rightarrow w\cdot 0+F_4\cdot 0+F\cdot d=0 \rightarrow$$
$$d=0$$

Όπου F η δύναμη στην ράβδο από το οριζόντιο επίπεδο. Αλλά η απόσταση d της δύναμης από το Σ είναι μηδενική, πράγμα που σημαίνει ότι η δύναμη F θα διέρχεται και αυτή από το σημείο Σ. Τέτοια είναι η δύναμη F_6, του σχήματος.

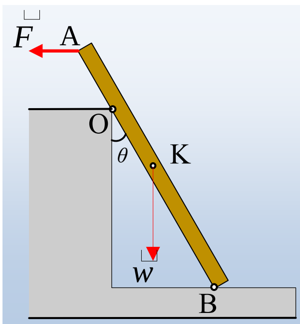
Συμπέρασμα:

Για να ισορροπεί ένα στερεό με την επίδραση 3 ομοεπιπέδων δυνάμεων, θα πρέπει:

A) Οι δυνάμεις είναι παράλληλες (και βέβαια να ισχύει ΣF=0) ή

B) Οι δυνάμεις να είναι συντρέχουσες (οι δυνάμεις να διέρχονται από το ίδιο σημείο) και πάλι να ισχύει η συνθήκη ΣF=0!

17) Η ομογενής δοκός ΑΒ μήκους ℓ και βάρους w=200N ισορροπεί όπως στο σχήμα, όπου στο σημείο Ο με (ΑΟ)= 0,2ℓ, στηρίζεται σε λείο κατακόρυφο τοίχο, ενώ με το άκρο της Β, στο έδαφος, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής $\mu_s=\mu=0{,}5$. Δίνεται ότι στο άκρο της Α ασκείται, μέσω νήματος, οριζόντια δύναμη F μέτρου F=25N, ενώ η γωνία θ που σχηματίζει η δοκός με τον τοίχο έχει ημθ=0,6 και συνθ=0,8.



i) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται στην δοκό από τον τοίχο στο σημείο Ο.

ii) Να βρεθεί η τριβή που ασκείται στη δοκό από το έδαφος.

iii) Για ποια τιμή F_1 της οριζόντιας δύναμης, η δοκός χάνει οριακά την επαφή της με το έδαφος;

iv) Αν η δύναμη F άλλαζε φορά, διατηρώντας την οριζόντια διεύθυνση και μέτρο F=25N, θα ισορροπούσε ή όχι η δοκός;

Απάντηση:

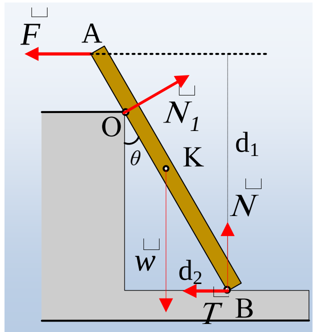
Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όπου η N_1 είναι κάθετη στη ράβδο.

Από την ισορροπία της ράβδου παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\Sigma F=0 \ (1) \ \text{και} \ \Sigma\tau=0 \ (2)$$

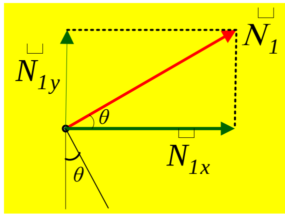
ως προς οποιοδήποτε σημείο και αν πάρουμε τις ροπές.

i) Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2) ως προς το άκρο B της δοκού, έχουμε:



$$\tau_F+\tau_{N_1}+\tau_w+\tau_N+\tau_T=0 \rightarrow$$
$$F\cdot d_1-N_1\cdot 0{,}8\mathrm{l}+w\cdot d_2+0+0=0 \rightarrow$$
$$F\cdot \mathrm{l}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-N_1\cdot 0{,}8\mathrm{l}+w\cdot\frac{\mathrm{l}}{2}\cdot\eta\mu\theta \rightarrow$$
$$25\cdot 0{,}8N-0{,}8N_1+200\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}6N=0$$
$$N_1=100N$$

ii) Αναλύουμε την δύναμη N_1 σε δύο συνιστώσες μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, όπως στο διπλανό σχήμα. Η γωνία μεταξύ της δύναμης N_1 και της οριζόντιας διεύθυνσης είναι ίση με την γωνία θ που σχηματίζει η δοκός με τον τοίχο (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές), οπότε:

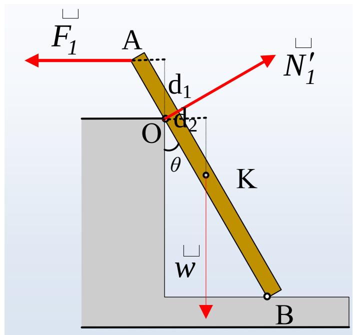


$$N_{1x}=N_1\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=100\cdot 0{,}8N=80N \ \text{και} \ N_{1y}=N_1\cdot\eta\mu\vartheta=100\cdot 0{,}6N=60N$$

Αλλά τότε εφαρμόζουμε την συνθήκη ισορροπίας (1) σε άξονες, παίρνοντας:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow N_{1x}-F-T=0 \rightarrow T=N_{1x}-F=80N-25N=55N$$

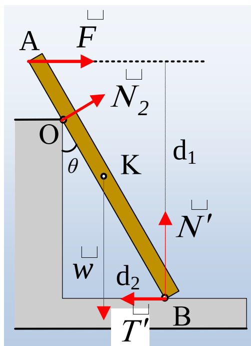
iii) Έστω για οριζόντια δύναμη μέτρου F_1 η δοκός χάνει οριακά την επαφή της με το έδαφος, ενώ ισορροπεί στην αρχική τη θέση. Τότε οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω της, είναι αυτές του διπλανού σχήματος. Παίρνουμε τις ροπές ως προς το σημείο Ο και έχουμε:



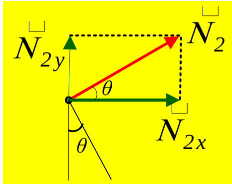
$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow F_1\cdot d_1-w\cdot d_2=0 \rightarrow$$
$$F_1\cdot 0{,}2\mathrm{l}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=w\cdot 0{,}3\mathrm{l}\cdot\eta\mu\theta \rightarrow$$
$$F_1=\frac{w\cdot 0{,}3\cdot\eta\mu\theta}{0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{200\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6}{0{,}2\cdot 0{,}8}N=225N$$

iv) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στην δοκό, μόλις η οριζόντια δύναμη F, αποκτήσει φορά προς τα δεξιά. Υποθέτουμε ότι η δοκός ισορροπεί και εφαρμόζουμε τις εξισώσεις (1) και (2) για την ισορροπία της, δουλεύοντας όπως και στα παραπάνω ερωτήματα.

Παίρνοντας τις ροπές ως προς το άκρο Β της δοκού, έχουμε:



$$\tau_F + \tau_{N_2} + \tau_w + \tau_{N'} + \tau_{T'} = 0 \rightarrow$$
$$-F \cdot d_1 - N_2 \cdot 0{,}8l + w \cdot d_2 + 0 + 0 = 0 \rightarrow$$
$$-F \cdot l \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - N_2 \cdot 0{,}8l + w \cdot \frac{l}{2} \cdot \eta\mu\theta \rightarrow$$
$$-25 \cdot 0{,}8N - 0{,}8N_2 + 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}6N = 0$$
$$N_2 = 50N$$



Οπότε αναλύοντας την δύναμη N_2 σε δύο συνιστώσες, παίρνουμε:

$N_{2x}=N_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta=50 \cdot 0{,}8N=40N$ και $N_{2y}=N_2 \cdot \eta\mu\vartheta=50 \cdot 0{,}6N=30N$

Και από την εξίσωση (1), για την ισορροπία στους άξονες x και y βρίσκουμε:

$\Sigma F_x=0 \rightarrow N_{2x}+F-T'=0 \rightarrow T'=N_{2x}+F=40N+25N=65N$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_{2x}+N'-w=0 \rightarrow N'=w-N_{2y}=200N-30N=170N$

Η μέγιστη δυνατή στατική τριβή που μπορεί να αναπτυχθεί μεταξύ δοκού και οριζοντίου εδάφους (η οριακή τριβή) έχει μέτρο:

$T_{op}=\mu_s \cdot N'=0{,}5 \cdot 170N=85N$

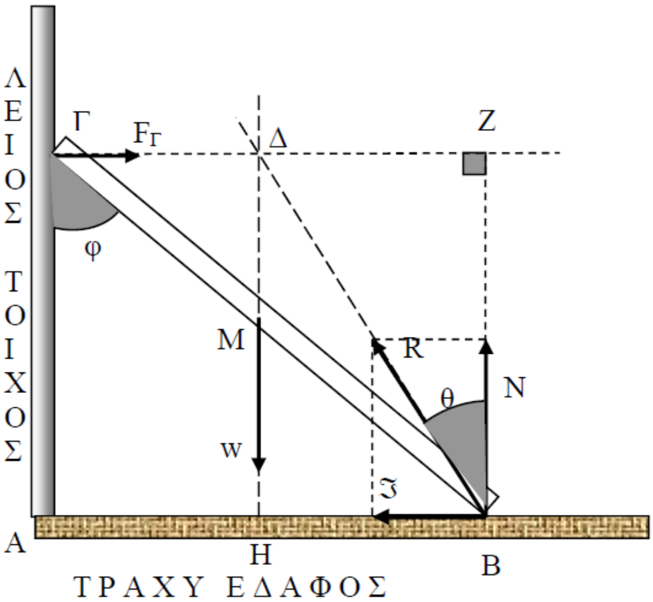
Βλέπουμε δηλαδή ότι η μέγιστη στατική τριβή που μπορεί να αναπτυχθεί έχει μέτρο 85N, πολύ μεγαλύτερη από την απαραίτητη για την ισορροπία, στατική τριβή και η δοκός θα ισορροπήσει.

18)

Μια ομογενής δοκός ΒΓ μήκους ℓ και βάρους w, ισορροπεί με το άκρο της Γ ακουμπισμένο σε λείο κατακόρυφο τοίχο και άλλο άκρο της Β σε επαφή με οριζόντιο έδαφος. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και να υπολογίσετε τα μέτρα τους. Δίνεται και η γωνία φ που σχηματίζει ο άξονας της ράβδου με τον κατακόρυφο τοίχο.

Λύση

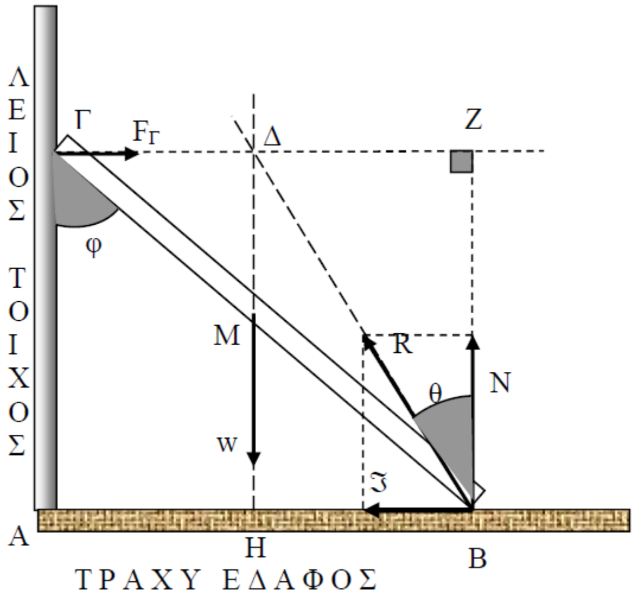
Στη δοκό ασκούνται τρεις δυνάμεις, μία εξ αποστάσεως, το βάρος της και δύο εξ επαφής, μία με τον λείο τοίχο και μία με το τραχύ έδαφος.



Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ της δοκού ΒΓ και του εδάφους, ώστε η δοκός να ισορροπεί.

Λύση

Στη δοκό ασκούνται τρεις δυνάμεις, μία εξ αποστάσεως, το βάρος της και δύο εξ επαφής, μία με τον λείο τοίχο και μία με το τραχύ έδαφος.



Η δύναμη του βάρους w είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και σημείο εφαρμογής το μέσον M της δοκού, ενώ η δύναμη στήριξης $F_Γ$ από τον λείο τοίχο είναι κάθετη στον τοίχο. Η τρίτη δύναμη R από το έδαφος, μπορεί να σχεδιαστεί τυχαία, επειδή όμως είναι η τρίτη δύναμη μπορεί να σχεδιαστεί ώστε να διέρχεται από το σημείο τομής Δ των δύο άλλων (βλέπε σχήμα).

Η δύναμη αυτή αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους δυνάμεις, την τριβή $\Im$ και την κάθετη δύναμη στήριξης N. Είναι $\Im$ = R ημθ και N =R συνθ.

Επειδή δοκός ισορροπεί πρέπει Στ = 0. Για την εφαρμογή της συνθήκης επιλέγουμε το σημείο B της ράβδου, από το οποίο διέρχονται ουσιαστικά δύο άγνωστες δυνάμεις ($\Im$ και N). $\Sigma\tau^{(B)}=0\Rightarrow\tau_{F_\Gamma}^{(B)}+\tau_w^{(B)}+\cancel{\tau_R^{(B)}}=0\Rightarrow-F_\Gamma\cdot(BZ)+w\cdot(BH)=0$. Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει ότι (BZ) = ℓ συνφ και $(BH)=\frac{\ell}{2}\cdot$ημφ. Άρα

$$-F_\Gamma\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+w\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu\varphi=0\Rightarrow\boxed{F_\Gamma=\frac{w}{2}\varepsilon\varphi\varphi}.$$

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια και τις συνθήκες $ΣF_x = 0$ και $ΣF_y = 0$.

$$\left.\begin{matrix}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\left.\begin{matrix}F_\Gamma-T=0\\ N-w=0\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\left.\begin{matrix}F_\Gamma=T\\ N=w\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\left.\begin{matrix}T=\frac{w}{2}\varepsilon\varphi\varphi\\ N=w\end{matrix}\right\rangle \qquad (1)$$

Επομένως $R=\sqrt{N^2+T^2}\Rightarrow R=\sqrt{w^2+\frac{w^2}{4}\varepsilon\varphi^2\varphi}\Rightarrow R=\frac{w}{2}\sqrt{4+\varepsilon\varphi^2\varphi}$

Για τη γωνία θ ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta=\frac{T}{N}\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta=\frac{\varepsilon\varphi\varphi}{2}$.

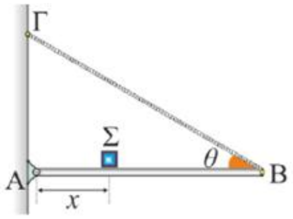
B)

$$\text{Πρέπει}: \Im\le\Im_{s,\max}\Rightarrow\Im\le\mu_s\cdot N\overset{(1)}{\Longrightarrow}\frac{w}{2}\varepsilon\phi\varphi\le\mu_s\cdot w\Rightarrow\mu_s\ge\frac{1}{2}\varepsilon\phi\varphi\Rightarrow$$

$$\mu_{s,\min}=\frac{1}{2}\varepsilon\phi\varphi$$

19)

Η ράβδος του σχήματος είναι ομογενής και έχει μάζα $M = 6$ kg και μήκος $l = 3$ m. Πάνω στη ράβδο τοποθετούμε ένα σώμα Σ, μικρών διαστάσεων, που έχει μάζα $m = M/2$. Αρχικά τοποθετούμε το Σ στη θέση Α και αρχίζουμε να το μετακινούμε πολύ αργά πάνω στη ράβδο ώσπου να σπάσει το νήμα. Πριν τοποθετήσουμε το σώμα Σ, η τάση του νήματος έχει ίδιο μέτρο με το βάρος της ράβδου. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ \text{m/s}^2$.



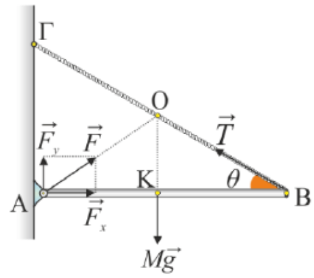
α. Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο πριν τοποθετήσουμε το σώμα Σ και υπολογίστε τα μέτρα τους.

β. Βρείτε πώς μεταβάλλεται το μέτρο της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x του σώματος από το σημείο Α

γ. Βρείτε τη μέγιστη μετατόπιση του σώματος Σ πάνω στη ράβδο, αν η μέγιστη δύναμη που αντέχει το νήμα (όριο θραύσης) είναι $T_{max} = 100$ N.

ΛΥΣΗ

α. Πριν τοποθετήσουμε το σώμα Σ, στη ράβδο ασκούνται τρεις δυνάμεις και επειδή η ράβδος ισορροπεί, οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο Ο. Θα υπολογίσουμε τη γωνία θ. Λόγω ισορροπίας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν ως προς κάθε σημείο .



Μας συμφέρει να πάρουμε τις ροπές ως προς το Κ

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_y(\text{AK}) = T_y(\text{BK}) \Rightarrow F_y = T_y \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T_y = w \Rightarrow 2T\eta\mu\theta = T \Rightarrow$$

$$\eta\mu\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T\sigma\upsilon\nu\theta$$

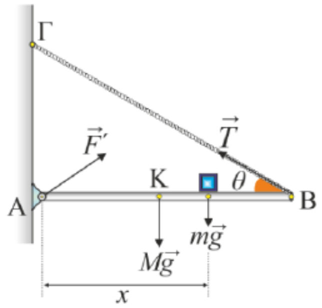
Από την (1) βρίσκουμε $F_y = T\eta\mu\theta$.

Για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:

$$T = Mg = 60\ \text{N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{T^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + T^2\eta\mu^2\theta} = T \Rightarrow F = 60\ \text{N}$$

β. Θα υπολογίσουμε την τάση του νήματος σαν συνάρτηση της μετατόπισης x του σώματος Σ από το Α.



$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_y l - Mg\frac{l}{2} - mgx = 0 \Rightarrow$$

$$T\eta\mu\theta l = Mg\frac{l}{2} + mgx \Rightarrow \frac{T}{2}l = Mg\frac{l}{2} + \frac{M}{2}gx \Rightarrow$$

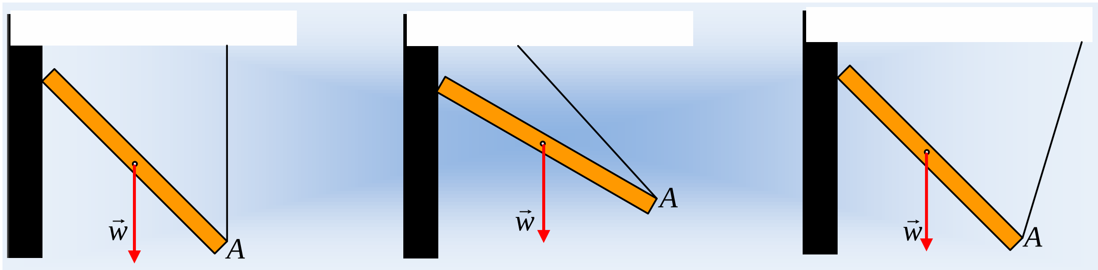
$$T = Mg + Mg\frac{x}{l} \Rightarrow T = 60 + 20x\ \text{(SI)}$$

γ. Πρέπει:

$$T \leq T_{max} \Rightarrow 60 + 20x \leq 100 \Rightarrow 20x \leq 40 \Rightarrow x \leq 2$$

Επομένως η μέγιστη μετατόπιση του σώματος Σ πάνω στη ράβδο είναι $x = 2$ m.

20) Μια ομογενής ράβδος κρέμεται δεμένη στο ένα της άκρο με νήμα, ενώ με το άλλο της άκρο ακουμπά σε **λείο** κατακόρυφο τοίχο. Στα σχήματα βλέπετε τρεις διαφορετικές εκδοχές ισορροπίας.



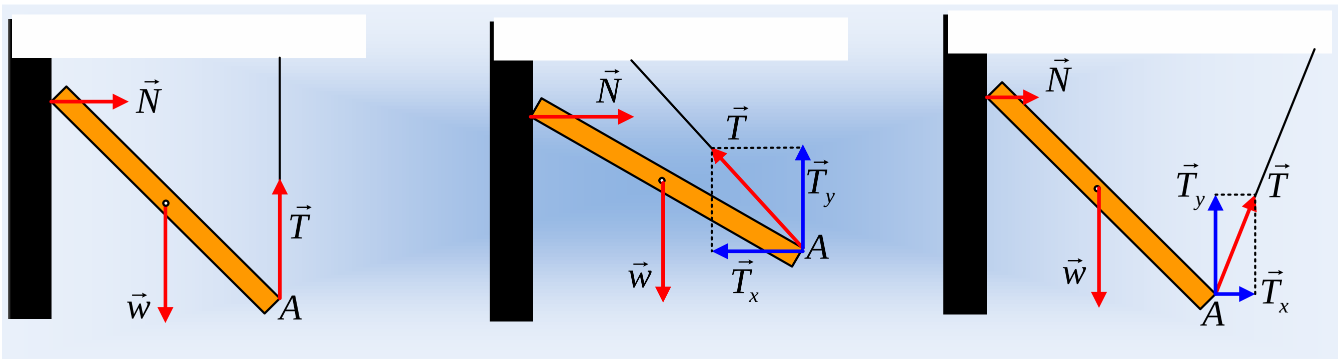
(α) (β) (γ)

i) Να εξετάσετε σε ποια ή ποιες από τις παραπάνω περιπτώσεις η ράβδος μπορεί να ισορροπεί.

ii) Τι θα συνέβαινε στην περίπτωση (α) αν ο τοίχος δεν ήταν λείος;

Απαντήσεις:

i) Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, λαμβάνοντας υπό όψη, ότι δεν υπάρχουν τριβές.



Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει:

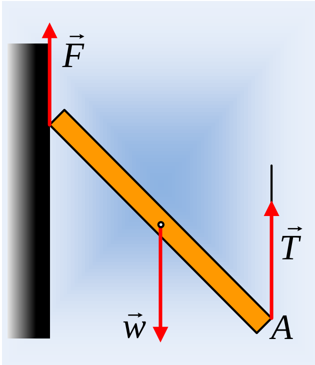
1) $\Sigma\vec{F}=0$ → $\Sigma F_x=0$ (1) και $\Sigma F_y=0$ (2)

2) Στ=0 (3) ως προς οποιοδήποτε σημείο.

- Στο πρώτο σχήμα: $\Sigma F_x=N\neq0$ και η ράβδος δεν ισορροπεί.
- Στο δεύτερο σχήμα: $\Sigma F_x=0$ → $N=T_x$. Αυτό μπορεί να ισχύει και η ράβδος να ισορροπεί.
- Στο τρίτο σχήμα: $\Sigma F_x=0$ → $N+T_x\neq0$ και δεν μπορεί να υπάρξει ισορροπία.

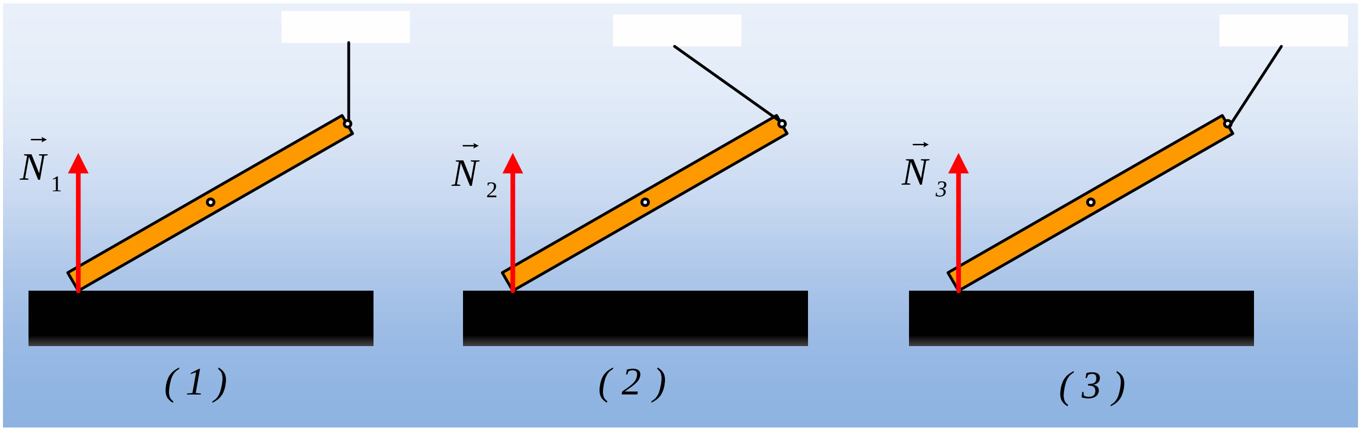
Βλέπουμε λοιπόν, ότι μόνο η 2η εκδοχή μπορεί να οδηγήσει σε ισορροπία.

ii) Αν ο τοίχος δεν ήταν λείος στην περίπτωση (α), θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι αναπτύσσεται μεταξύ ράβδου και τοίχου μια κατακόρυφη δύναμη F, όπως στο διπλανό σχήμα, οπότε να εξασφαλίζεται η ισορροπία;



Η απάντηση είναι ότι αυτή η δύναμη, η **παράλληλη στις επιφάνειες επαφής**, δεν μπορεί παρά να ονομάζεται **τριβή**. Αλλά για να υπάρχει τριβή, πρέπει να προϋπάρξει κάθετη αντίδραση. ***Δεν μπορεί να αναπτυχθεί τριβή, χωρίς να «πιέζονται» οι δύο επιφάνειες***. Άρα, ούτε και σε μη λείο τοίχο, θα μπορούσε να υπάρξει ισορροπία, αφού θα ασκείται στη ράβδο και μια οριζόντια δύναμη $N \neq 0$, οπότε $\Sigma F_x = N \neq 0$ και η ράβδος δεν θα ισορροπεί.

21) Μια ράβδος ισορροπεί σχηματίζοντας την ίδια γωνία με το έδαφος σε τρεις εκδοχές, όπως στο παραπάνω σχήμα, (στο σχήμα (1) το νήμα είναι κατακόρυφο).



i) Λεία επίπεδα **μπορεί** να είναι:

α) Το (1) και το (2), β) Το (1) και το (3), γ) Και τα τρία επίπεδα.

δ) Μόνο το (1), ε) Μόνο το (2), στ) Μόνο το (3).

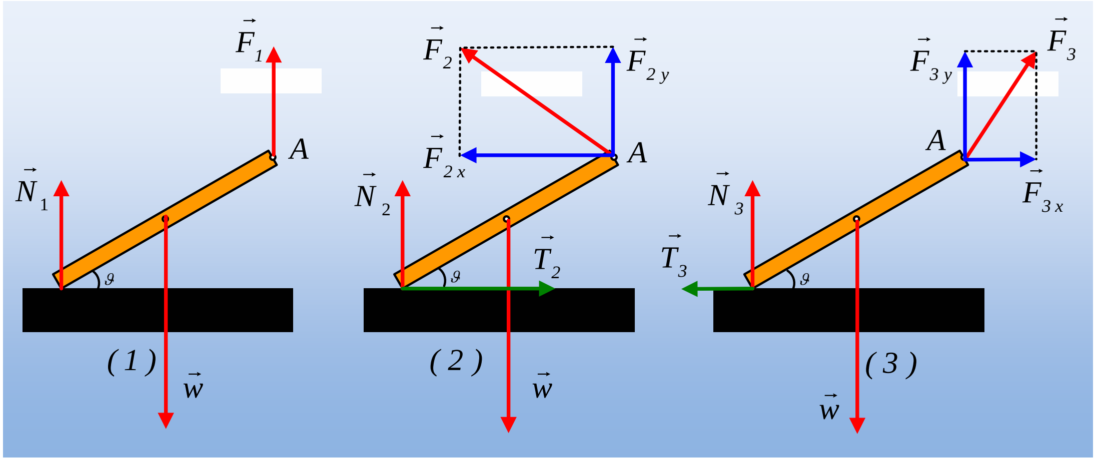
ii) Για τις κάθετες αντιδράσεις των τριών επιπέδων ισχύει:

α) $N_1 = N_2 = N_3$. β) $N_1 > N_2 > N_3$. γ) $N_2 < N_1 < N_3$. δ) $N_3 < N_1 < N_2$.

Απαντήσεις:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπου F_1, F_2 και F_3 οι τάσεις των τριών νημάτων. Στο σχήμα (1) δεν ασκείται τριβή, αφού όλες οι δυνάμεις είναι κατακόρυφες, ενώ στα σχήματα (2) και (3) θα αναπτυχθεί τριβή, αφού $\Sigma F_x = 0$, οπότε $T_2 = F_{2x}$ και $T_3 = F_{3x}$.

Συνεπώς το μόνο επίπεδο που **μπορεί να είναι λείο**, είναι το (1). Σωστό το δ).



ii) Αφού η ράβδος ισορροπεί Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε το άκρο Α:

Στο (1) σχήμα: Στ=0 → $w\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta - N_1\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta = 0 \rightarrow N_1 = \frac{w}{2}$.

Στο (2) σχήμα: Στ=0 → $w\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta - N_2\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta + T_2\cdot\ell\cdot\eta\mu\vartheta = 0 \rightarrow N_2 = \frac{w}{2} + T_2\cdot\varepsilon\varphi\vartheta$.

Στο (3) σχήμα: Στ=0 → $w\frac{\ell}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta - N_3\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta - T_3\cdot\ell\cdot\eta\mu\vartheta = 0 \rightarrow N_3 = \frac{w}{2} - T_3\cdot\varepsilon\varphi\vartheta$.

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι: $N_3 < N_1 < N_2$. **Σωστή η δ) πρόταση**.

22)

Η ομογενής δοκός ΑΒ του σχήματος έχει βάρος w, μήκος L και ισορροπεί στηριζόμενη πάνω σε δύο στηρίγματα στα σημεία Γ και Β. Από το άκρο της Β εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή t = 0 σώμα διπλάσιου βάρους από την δοκό με ταχύτητα υ_o. Αν μεταξύ της δοκού και του σώματος δεν ασκούνται τριβές και η απόσταση ΑΓ είναι ίση με $\frac{L}{3}$, η χρονική στιγμή t_1 που θα ανατραπεί η ράβδος είναι ίση με:

α. $\frac{L}{12\upsilon_o}$ **β.** $\frac{L}{4\upsilon_o}$ **γ.** $\frac{3L}{4\upsilon_o}$

ΛΥΣΗ

Σωστό το γ.

Υπόδειξη:

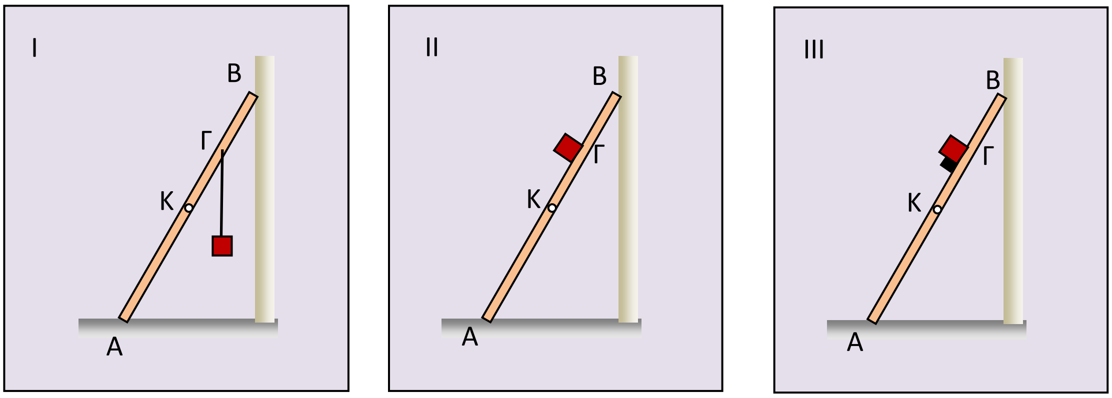
• Η δοκός ανατρέπεται όταν μηδενίζεται η δύναμη που δέχεται η δοκός από το στήριγμα στο σημείο Β.

• Σχεδίασε δυνάμεις στη δοκό και εφάρμοσε τη συνθήκη $\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0$.

• Βρες σε ποιο σημείο μηδενίζεται η δύναμη N_B.

• Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Εφάρμοσε τον τύπο της κίνησής του για να βρεις το ζητούμενο χρόνο.

23)



Και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ομοιότητες :
μάζα ομογενούς δοκού M=17,5Kg , μήκους L, μάζα σώματος αμελητέων διαστάσεων m=5Kg, $\theta=60^0$, $g=10m/s^2$, (ΚΓ)=L/4 , τοίχος λείος.

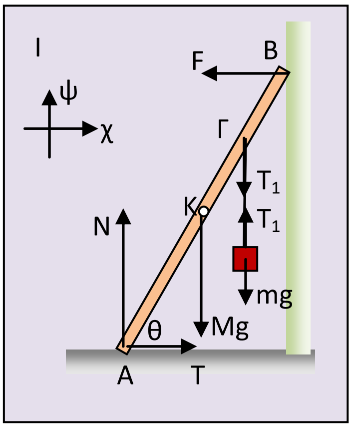
Στην περίπτωση (Ι) γενική ισορροπία. Στην περίπτωση (ΙΙ) το σώμα έχει αφεθεί από το Β ελεύθερο και ολισθαίνοντας στη δοκό η οποία είναι λεία μόνο στην επιφάνεια ολίσθησης, περνά από το Γ, Στην περίπτωση (ΙΙΙ) στο σημείο Γ υπάρχει μικρό εμπόδιο (αμελητέας μάζας) ενσωματωμένο στη ράβδο που εμποδίζει το σώμα να κατέβει.

1) Να συγκριθούν οι δυνάμεις στη δοκό από τον λείο τοίχο καθώς και οι τριβές στο σημείο Α.

2) Αν στη περίπτωση (Ι) η δοκός ισορροπεί οριακά υπολογίστε τον συντελεστή τριβής και δικαιολογείστε την ισορροπία στις άλλες περιπτώσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) **Στην περίπτωση (Ι).**



$$\text{Από την ισορροπία του σώματος } m: \mathrm{T}_1 = mg \quad (1)$$

Από την μη περιστροφή της δοκού:

$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow FL\eta\mu\theta - \mathrm{T}_1 3\frac{L}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - \mathrm{M}g\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow$$

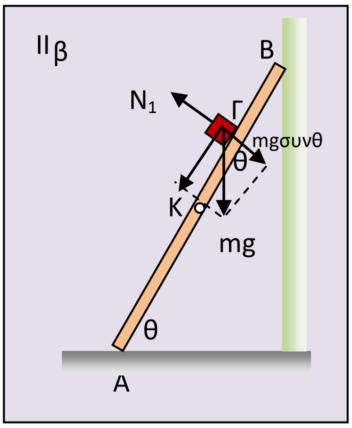
$$FL\eta\mu\theta - mg3\frac{L}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - \mathrm{M}g\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow$$

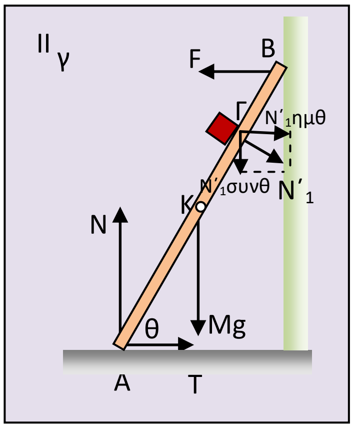
$$F = \frac{(3mg + 2Mg)\sigma\upsilon\nu\theta}{4\eta\mu\theta} \xrightarrow{\alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta} F_{\mathrm{I}} = \frac{100\sqrt{3}}{3}N$$

$$\text{Από την μη μεταφορά της δοκού } : \Sigma Fx = 0 \Rightarrow T = F \Rightarrow T_{\mathrm{I}} = \frac{100\sqrt{3}}{3}N$$

Στην περίπτωση (ΙΙ).

Το σώμα m ολισθαίνει χωρίς τριβές και τη στιγμή που περνά από το σημείο Γ δέχεται την N_1 λόγω επαφής με τη ράβδο (στο σχ.ΙΙβ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σώμα) και επομένως ασκεί στη δοκό αντίθετη N_1' (στο σχ.ΙΙγ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στη δοκό)





Για το σώμα (ΙΙβ) από την ισορροπία κάθετα στη δοκό έχομε : $N_1 = mg\sigma\upsilon\nu\theta = N_1'$ (2)

Για τη δοκό (ΙΙγ) :

Από την μη περιστροφή της δοκού:

$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow FL\eta\mu\theta - N_1' 3\frac{L}{4} - Mg\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \xrightarrow{(2)}$$

$$FL\eta\mu\theta - mg\sigma\upsilon\nu\theta\cdot 3\frac{L}{4} - Mg\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow$$

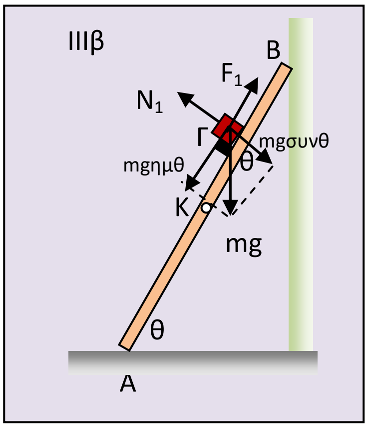
$$F = \frac{(3mg+2Mg)\sigma\upsilon\nu\theta}{4\eta\mu\theta} \xrightarrow{\alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta} F_{II} = \frac{100\sqrt{3}}{3}N$$

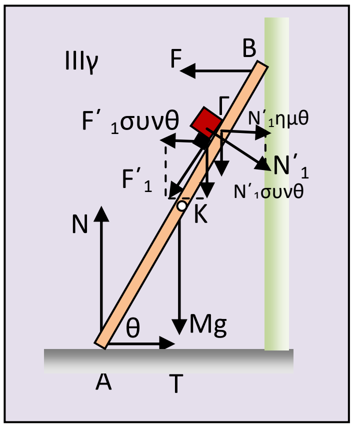
$$\text{Από την μη μεταφορά της δοκού}: \Sigma Fx = 0 \Rightarrow T + N_1'\eta\mu\theta - F = 0 \xrightarrow{(2)}$$

$$T = F - mg\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta \Rightarrow T = \frac{100\sqrt{3}}{3} - 5\cdot 10\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T_{II} = \frac{125\sqrt{3}}{6}N$$

Στην περίπτωση (ΙΙΙ).

Το σώμα m στη θέση Γ δέχεται την N_1 και την F_1 λόγω επαφής με τη ράβδο και το μικρό εμπόδιο(στο σχ.ΙΙΙβ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σώμα) και επομένως ασκεί στη δοκό αντίθετες N_1' και F'_1 (στο σχ.ΙΙΙγ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στη δοκό)





Για το σώμα (ΙΙΙβ) από την ισορροπία κάθετα στη δοκό έχομε : $N_1 = mg\sigma\upsilon\nu\theta = N_1'$(2)

και παράλληλα στη δοκό $F_1 = mg\eta\mu\theta$ (3)

Για τη δοκό (ΙΙΙγ) :

Από την μη περιστροφή της δοκού:

$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow FL\eta\mu\theta - N_1' 3\frac{L}{4}\cdot - Mg\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \xrightarrow{(2)}$$

$$FL\eta\mu\theta - mg\sigma\upsilon\nu\theta\cdot 3\frac{L}{4} - Mg\frac{L}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow$$

$$F = \frac{(3mg+2Mg)\sigma\upsilon\nu\theta}{4\eta\mu\theta} \xrightarrow{\alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta} F_{III} = \frac{100\sqrt{3}}{3}N$$

$$\text{Από την μη μεταφορά της δοκού}:\Sigma Fx=0\Rightarrow T+N_1'\eta\mu\theta-F-F_1'\sigma\upsilon\nu\theta=0\xrightarrow{(2),(3)}$$

$$T=F-mg\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta+mg\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow \boxed{T_{III}=\frac{100\sqrt{3}}{3}N}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι : $F_I=F_{II}=F_{III}$ και $T_{II} < T_{III} = T_I$

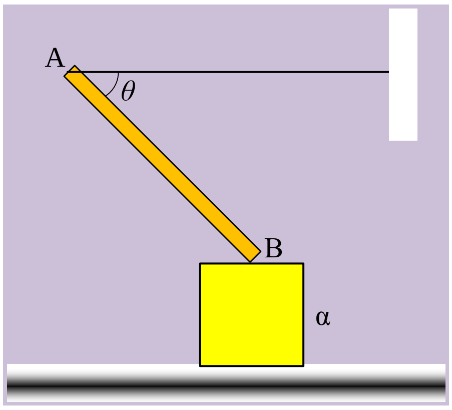
2) Στην περίπτωση (Ι)

$$\text{Από την μη μεταφορά της δοκού}:\Sigma F\psi=0\Rightarrow N-Mg-T_1=0\xrightarrow{(1)}$$
$$N=Mg+mg\Rightarrow N=(M+m)g\Rightarrow N=(17,5+5)10\Rightarrow N=225N$$

Λόγω οριακής μη ολίσθησης ισχύει $T=\mu N\Rightarrow \mu=\frac{T}{N}=\frac{\frac{100\sqrt{3}}{3}}{225}\Rightarrow \boxed{\mu=\frac{4\sqrt{3}}{27}\approx 0,25}$

Με βάση τις προηγούμενες σχέσεις ως προς την τριβή $T_{II} < T_{III} = T_I$ αφού στη περίπτωση II η τριβή είναι μικρότερη της αντίστοιχης στην Ι όπου η τριβή είναι οριακή συμπεραίνουμε ότι έχομε στατική τριβή δηλαδή μη ολίσθηση και προφανώς στην III θα έχομε ότι και στην Ι δηλαδή οριακή μη ολίσθηση.

24) Η ομογενής δοκός ΑΒ βάρους 500Ν, ισορροπεί όπως στο σχήμα, δεμένη στο άκρο της Α με οριζόντιο νήμα, με το οποίο σχηματίζει γωνία θ, όπου ημθ=0,8, ενώ το άκρο της Β στηρίζεται σε κύβο πλευράς α=0,4m, στο κέντρο της πάνω βάσης του.



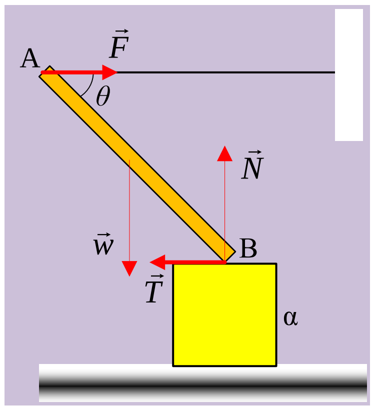
i) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος.

ii) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής τριβής μεταξύ δοκού και κύβου για να εξασφαλίζεται η παραπάνω ισορροπία;

iii) Να υπολογιστεί η ροπή της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, η οποία ασκείται στον κύβο, ως προς το κέντρο Ο του κύβου.

Απάντηση:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όπου F η τάση του νήματος και Τ η στατική τριβή που δέχεται από τον κύβο. Από την ισορροπία της δοκού παίρνουμε:



$$\sum\vec{F}=0 \Rightarrow \begin{cases}\Sigma F_x=0\rightarrow F=T\ \ (1)\\ \Sigma F_y=0\ \rightarrow N=w=500N\ \ (2)\end{cases}$$

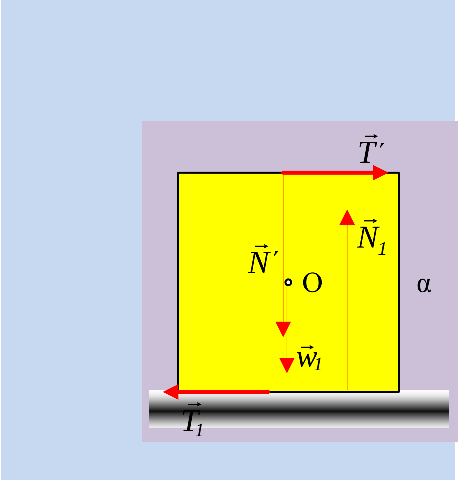
$$\Sigma\tau_A=0\rightarrow N\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-w\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu\theta-T\cdot\ell\cdot\eta\mu\theta=0\rightarrow$$

$$500\cdot 0,6-500\cdot ½\cdot 0,8-T\cdot 0,8=0\rightarrow$$

$$T=187,5N$$

Οπότε από την (1) παίρνουμε ότι και F=187,5N.

ii) Η ισορροπία της δοκού επιβάλλει η παραπάνω τριβή να είναι στατική. Ο ελάχιστος συντελεστής είναι αυτός, που καθιστά την παραπάνω τριβή οριακή!



$$T \le T_{o\rho} \to T \le \mu_s N \to \mu_s \ge \frac{T}{N} \to \mu_s \ge \frac{187,5}{500}$$

$$\mu_{s,min}=0,375$$

iii) Στον κύβο ασκούνται οι αντιδράσεις Τ΄ και Ν΄ από τη δοκό, καθώς και η τριβή T_1 και η κάθετη αντίδραση N_1 από το έδαφος. Από την ισορροπία του κύβου (οι αριστερόστροφες ροπές θετικές), παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \to T_1=T'= 187,5N$$

$$\Sigma F_y=0 \to N_1=N'+ w_1 \quad (2)$$

$$\Sigma\tau_O = 0 \to N_1 \cdot x - w_1 \cdot 0 - N' \cdot 0 - T' \cdot \frac{a}{2} - T_1 \cdot \frac{a}{2} = 0 \to$$

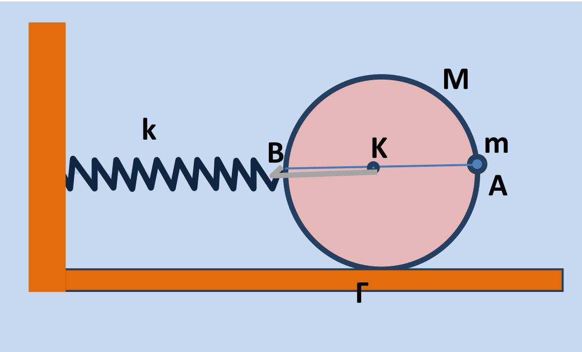
$$N_1 \cdot x = T \cdot a = 187,5 \cdot 0,4Nm = 75Nm$$

$$\tau_{N_{1,o}} = +75Nm$$

Σχόλιο:

Στο τελευταίο ερώτημα, αρκεί να προσέξουμε ότι δεν έχουν ροπή ως προς το Ο, το βάρος και η Ν΄, έχουμε όμως μια ροπή ζεύγους (Τ΄ και T_1) δεξιόστροφη, οπότε για να επιτυγχάνεται ισορροπία, έχουμε μετατόπιση προς τα δεξιά της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου N_1, με αποτέλεσμα να εμφανίζει μια αριστερόστροφη ροπή, εξουδετερώνοντας έτσι τη ροπή του ζεύγους.

27)



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε ένα λεπτό δίσκο μάζας M, που στο άκρο A της οριζοντίου διαμέτρου του AB έχει συγκολλημένη μια σημειακή μάζα m=M , και στο κέντρο K με κατάλληλη διάταξη, είναι δεμένο οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k. Το σύστημα ισορροπεί. Τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή; Δικαιολογείστε

1) Το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος.
2) Το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta l = \frac{mg}{k}$ και ο συντελεστής οριακής τριβής ικανοποιεί τη σχέση $\mu_{o\rho.} \geq 1$
3) Το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta l = \frac{mg}{k}$ και ο συντελεστής οριακής τριβής ικανοποιεί τη σχέση $\mu_{o\rho.} \geq 0{,}5$

ΛΥΣΗ

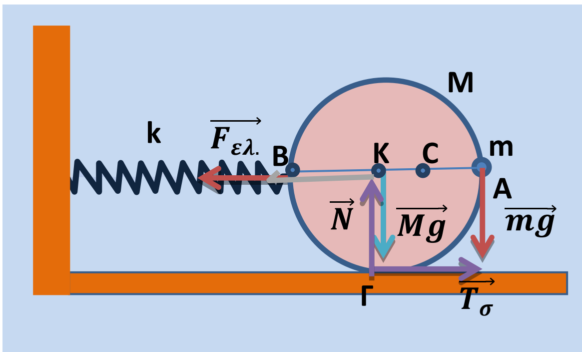
Σωστή η **(3)**

Αφού το στερεό ισορροπεί, πρέπει

$\Sigma F = 0 \;\; και \;\; \Sigma\tau_K = 0$

Δεν θα μπορούσε το ελατήριο να είναι στο φυσικό του μήκος, γιατί ο δίσκος θα μετακινούνταν προς τα δεξιά. Κι αυτό γιατί το κέντρο θα μάζας του συστήματος C, θα μετακινούνταν προς τα δεξιά. Μαζί του και το κέντρο του δίσκου, οπότε θα τεντώνονταν το ελατήριο, άρα δεν θα ισορροπούσε στη θέση αυτή.

Επίσης, στη θέση ισορροπίας του συστήματος, το ελατήριο δεν θα μπορούσε να είναι συσπειρωμένο, γιατί τότε η δύναμη του ελατηρίου θα έσπρωχνε τον κύλινδρο , ο οποίος θα κινούνταν μεταφορικά, και στρεφόμενος εξαιτίας της ροπής του βάρους , δεν θα ισορροπούσε. Επίσης τότε η στατική τριβή T_σ αν ήταν προς τα δεξιά, δεν θα εξισορροπούσε τη δύναμη του ελατηρίου, αφού θα ήταν ομόρροπή της (προς τα δεξιά) ,



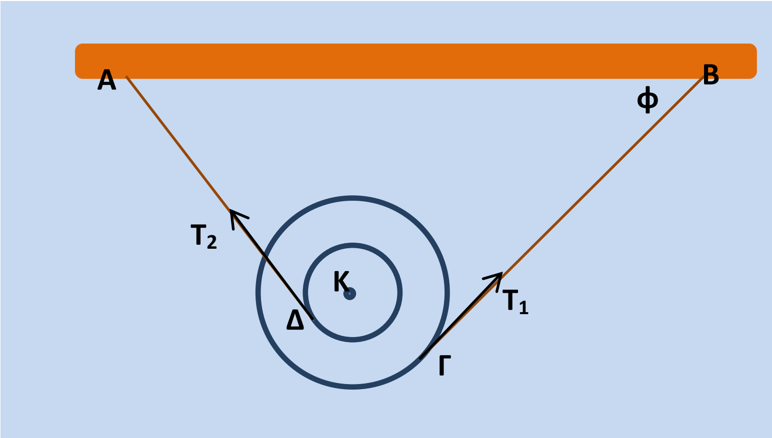
ενώ αν ήταν προς τα αριστερά, θα είχε ροπή ως προς το K, που μαζί με τη ροπή του βάρους του σώματος m, θα έστρεφαν τον δίσκο δεξιόστροφα, και δεν θα ισορροπούσε το σύστημα.

Άρα πρέπει το ελατήριο να είναι τεντωμένο, κι έτσι η στατική τριβή $\overrightarrow{\boldsymbol{T_\sigma}}$ θα ήταν αντίθετη της $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{\varepsilon\lambda.}}}$**,** και επίσης η ροπή της θα εξισορροπούσε τη ροπή του βάρους $\overrightarrow{\boldsymbol{mg}}$ **.**

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma\tau_{(O)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{\varepsilon\lambda} = T_\sigma \\ N = (M+m)g \\ mg\cdot R - T_\sigma \cdot R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{k\Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}} \\ N = (M+m)g \\ T_\sigma = mg \end{cases}$$

Πρέπει $T_\sigma \leq T_{o\rho\iota\alpha\kappa\acute{\eta}} \Rightarrow mg \leq \mu_{o\rho.}(M+m)g \Rightarrow mg \leq \mu_{o\rho.}2mg \Rightarrow \boldsymbol{\mu_{o\rho.} \geq 0.5}$

28)

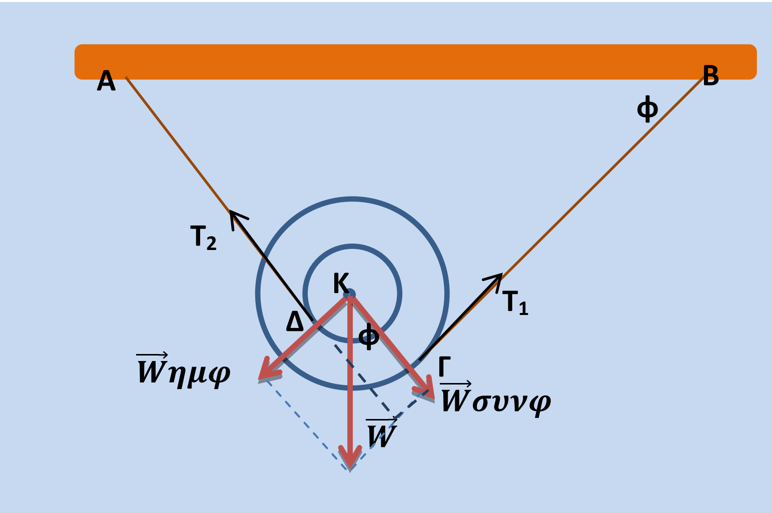


Στο σχήμα απεικονίζεται τροχαλία που φέρει εγκοπή ακτίνας R/2 , όπου R η ακτίνα της. Έχουμε τυλίξει πολλές φορές αβαρή μη ελαστικά νήματα ΒΓ και ΑΔ στην περιφέρεια και στην εγκοπή, και είναι κάθετα μεταξύ τους. Η τροχαλία ισορροπεί.

Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι η σωστή

i. $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{2}$ 2. $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 3. $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Δικαιολογείστε.

ΛΥΣΗ

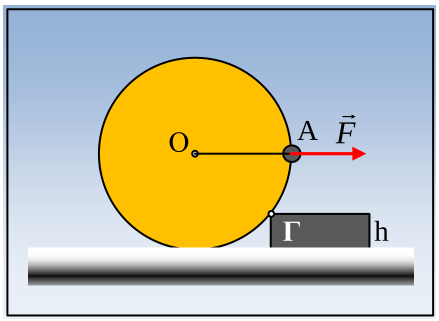


$$T_1 = W\eta\mu\varphi \quad , \quad T_2 = W\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\Sigma\tau_K = 0 \Longrightarrow T_2 \cdot \frac{R}{2} - T_1 \cdot R = 0 \Longrightarrow T_2 = 2T_1 \Longrightarrow W\sigma\upsilon\nu\varphi = 2W\eta\mu\varphi \Longrightarrow \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{2}$$

29) Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας M=10kg και ακτίνας R, ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή με σκαλοπάτι ύψους h=0,4R, όταν στο άκρο A μιας οριζόντιας ακτίνας OA έχει προσκολληθεί σημειακή μάζα m=1kg, στην οποία ασκούμε οριζόντια δύναμη μέτρου F=40N, όπως στο σχήμα. Δίνονται οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και σκαλοπατιού $\mu=\mu_s=0{,}8$ και $g=10m/s^2$.



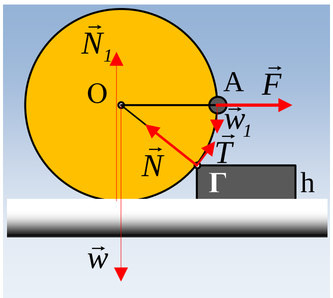
i) Να υπολογιστεί η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο στο σημείο επαφής του με το σκαλοπάτι.

ii) Να βρεθεί η κάθετη αντίδραση N από το σκαλοπάτι και να επιβεβαιωθεί ότι μπορεί να ασκηθεί η παραπάνω απαιτούμενη στατική τριβή.

iii) Πόση δύναμη δέχεται ο κύλινδρος από το οριζόντιο επίπεδο;

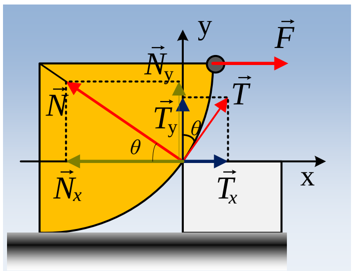
iv) Αρχίζουμε να μειώνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F. Ποια η ελάχιστη τιμή της δύναμης, η οποία είναι απαραίτητη για την εξασφάλιση της ισορροπίας του κυλίνδρου;

Απάντηση:



i) Ο κύλινδρος μαζί με την μάζα m, αποτελούν ένα στερεό σώμα s. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s, όπου N η κάθετη αντίδραση από το σκαλοπάτι και N_1 η κάθετη αντίδραση του επιπέδου. Από την ισορροπία του στερεού μας, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow T\cdot R - w_1\cdot R=0 \rightarrow T=w_1=mg=10N \ (1)$$



ii) Αναλύουμε την τριβή και την αντίδραση N σε οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες, όπως στο σχήμα. Για την γωνία θ έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{R-h}{R} = \frac{R-0,4R}{R} = 0,6 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 0,8$$

Από την ισορροπία του στερεού s στην οριζόντια διεύθυνση, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F+T_x-N_x=0 \rightarrow F + T\cdot\eta\mu\vartheta - N\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=0 \ \ (2) \rightarrow$$

$$N = \frac{F+T\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{40+10\cdot 0,6}{0,8} N = 57,5N$$

Αλλά τότε στο σημείο Γ μπορεί να ασκηθεί μέγιστη δύναμη στατικής τριβής (που σημαίνει ισορροπία) μέτρου:

$$T_{op}=T_{s,max}=\mu_s\cdot N=0,8\cdot 57,5N=46N$$

Συνεπώς η τριβή που απαιτείται στην περίπτωσή μας για την ισορροπία, μέτρου 10N εξασφαλίζεται χωρίς πρόβλημα.

iii) Τέλος από την συνθήκη ισορροπίας στην κατακόρυφη διεύθυνση y, παίρνουμε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_1-w-w_1+N\cdot\eta\mu\vartheta+T\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=0 \rightarrow$$

$$N_1= w+w_1-N\cdot\eta\mu\vartheta-T\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=100N+10N-57,5\cdot 0,6N-10\cdot 0,8N=67,5N$$

iv) Μειώνοντας την ασκούμενη δύναμη F, δεν μεταβάλλεται η απαραίτητη δύναμη τριβής, αφού από την σχέση (1) αυτή δεν εξαρτάται από την δύναμη F, αλλά έχει μέτρο ίσο με το βάρος της σημειακής μάζας m. Το ελάχιστο μέτρο της δύναμης, θα είναι αυτό που θα καθιστά την παραπάνω τριβή, οριακή δηλαδή για το μέτρο της θα ισχύει $T'=T_{op}=\mu_s N'$. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της κάθετης αντίδρασης N΄ θα γίνει ίσο:

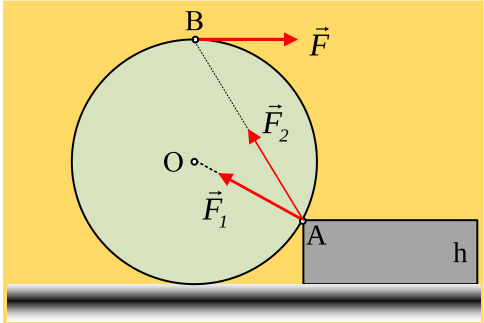
$$N' = \frac{T'}{\mu_s} = \frac{10}{0,8} N = 12,5N$$

Οπότε από την ισορροπία του στερεού s στην οριζόντια διεύθυνση, θα πάρουμε ξανά την εξίσωση (2), όπου με αντικατάσταση θα έχουμε:

$$F_{min} + T'\cdot\eta\mu\vartheta - N'\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=0 \rightarrow$$

$$F_{min}=-10\cdot 0,6N+12,5\cdot 0,8N=4N$$

30) Γύρω από ένα κύλινδρο έχουμε τυλίξει ένα νήμα, στο άκρο του οποίου ασκούμε μια **οριζόντια** δύναμη F. Ο κύλινδρος ισορροπεί σε **λείο** οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή με εμπόδιο ύψους h, όπως στο σχήμα.



i) Η δύναμη που **δέχεται ο κύλινδρος από το εμπόδιο** είναι:

α) η δύναμη F_1 με κατεύθυνση προς το κέντρο Ο του κυλίνδρου.

β) η δύναμη F_2 με κατεύθυνση προς το ανώτερο σημείο Β του κυλίνδρου.

γ) Καμιά από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις.

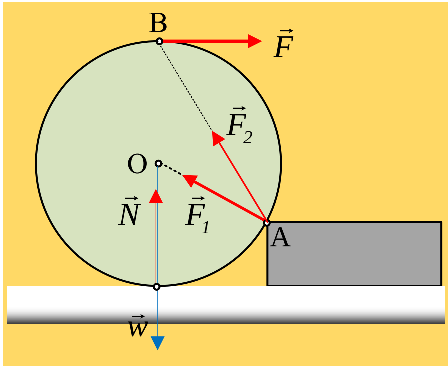
ii) Να **αποδείξετε** ότι μεταξύ κυλίνδρου και σκαλοπατιού αναπτύσσεται δύναμη τριβής.

iii) Για το μέτρο της ασκούμενης τριβής ισχύει: α) T < F, β) T = F, γ) T > F.

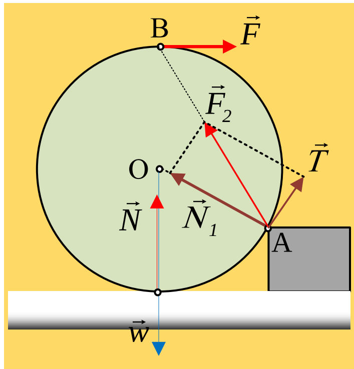
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απαντήσεις:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο. Αλλά τότε από τη συνθήκη ισορροπίας του στερεού, αφού ΣF=0, προκύπτει ότι Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Έτσι αν πάρουμε το **σημείο Β**, από το οποίο **διέρχονται** το **βάρος**, η **κάθετη αντίδραση** του επιπέδου Ν και η ασκούμενη **δύναμη F**, θα πρέπει **από το ίδιο σημείο να περνάει και η δύναμη από το εμπόδιο**, αν θέλουμε $Στ_B=0$. Σωστό το Β.



ii) Αν δεν αναπτυσσόταν τριβή στο σημείο επαφής κυλίνδρου-σκαλοπατιού, τότε η ασκούμενη δύναμη θα ήταν **κάθετη στην επιφάνεια του κυλίνδρου**, συνεπώς **θα πέρναγε από το κέντρο Ο του κυλίνδρου**. Αλλά σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα η δύναμη που ασκεί το σκαλοπάτι είναι η F_2 και όχι η F_1, άρα οι επιφάνειες δεν είναι λείες και ασκείται τριβή (ισοδύναμα η δύναμη F_2 **μπορεί να αναλυθεί** σε μια κάθετη στην επιφάνεια N_1, η οποία περνά από το Ο και μια τριβή, εφαπτόμενη στον κύλινδρο, όπως στο δεύτερο σχήμα).

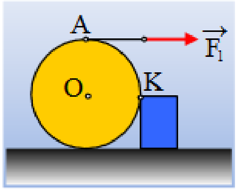


iii) Παίρνοντας τη συνθήκη ισορροπίας του κυλίνδρου ως προς το Ο, έχουμε:

$$Στ_o = 0 \Rightarrow τ_w + τ_N + τ_F + τ_{N_1} + τ_T = 0 \rightarrow 0+0-F\cdot R+0+T\cdot R = 0 \rightarrow T=F$$

Σωστό το (β)

31)



Γύρω από έναν κύλινδρο τυλίγουμε ένα νήμα στο άκρο του οποίου ασκούμε οριζόντια δύναμη F_1, με στόχο να υπερπηδήσει ο κύλινδρος ένα πακτωμένο εμπόδιο, ύψους $h=R$, όπως στο σχήμα. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και ο κύλινδρος ισορροπεί.

i) Σχεδιάστε τη δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο στο σημείο επαφής του με το εμπόδιο Κ, δικαιολογώντας την κατεύθυνσή της.

ii) Η κάθετη αντίδραση του επιπέδου είναι:

α) Μεγαλύτερη από το βάρος του κυλίνδρου.

β) Ίση με το βάρος του κυλίνδρου.

γ) Μικρότερη από το βάρος.

iii) Αυξάνουμε σιγά-σιγά το μέτρο της δύναμης F_1. Τη στιγμή που ο κύλινδρος είναι έτοιμος να υπερπηδήσει το εμπόδιο, το μέτρο της δύναμης F_1 είναι:

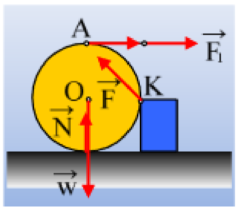
α) Ίσο με το βάρος του κυλίνδρου.

β) Μεγαλύτερο από το βάρος.

γ) Μικρότερο από το βάρος.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, όπου η δύναμη F_1 μεταφέρεται μέσω του νήματος και ασκείται στο σημείο Α του κυλίνδρου, όπου το νήμα εφάπτεται σε αυτόν, Ν η κάθετη αντίδραση του οριζοντίου επιπέδου και F η δύναμη από το εμπόδιο στο σημείο Κ.

i) Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Αλλά η F_1, το βάρος w και η Ν διέρχονται από το σημείο Α, οπότε και η δύναμη F από το εμπόδιο περνά επίσης από το Α. Πράγματι:

$$\Sigma\tau_A=0 \rightarrow F_1\cdot 0+w\cdot 0+N\cdot 0+F\cdot d=0 \rightarrow d=0$$

Όπου d η απόσταση του Α από τον φορέα της δύναμης F.

ii) Αφού ο κύλινδρος ισορροπεί ΣF=0 ή $\Sigma F_x=0$ και $\Sigma F_y=0$

Από την τελευταία εξίσωση $F_y+N-w=0 \rightarrow N=w-F_y$ (1)

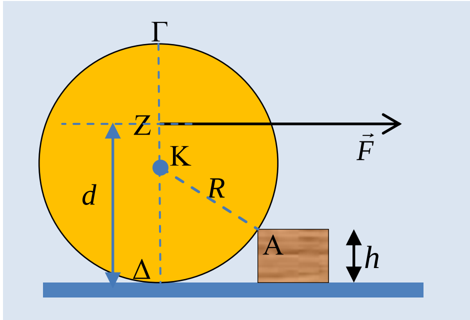
Άρα η κάθετη αντίδραση του επιπέδου είναι μικρότερη του βάρους. Σωστό το γ).

iii) Τη στιγμή που ο κύλινδρος «είναι έτοιμος» να υπερπηδήσει το εμπόδιο, ισορροπεί ακόμη, ενώ μηδενίζεται η αντίδραση Ν του επιπέδου. Οριακά χάνει την επαφή με το οριζόντιο επίπεδο. Αλλά τότε παίρνοντας τις ροπές, ως προς το σημείο Κ, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(K)}=0 \rightarrow w\cdot R-F_1\cdot R+F\cdot 0=0 \rightarrow F_1=w=Mg.$$

Σωστή η α) πρόταση.

32) Ο κύλινδρος του σχήματος έχει ακτίνα *R*, βάρος $\vec{W}$ και ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Αν θέλουμε να υπερπηδήσει το σκαλοπάτι ύψους *h*, ασκούμε κατάλληλη οριζόντια δύναμη μέτρου *F*, σε κάποιο σημείο Ζ της κατακόρυφης διαμέτρου ΓΔ, όπου $(Z\Delta)=d$, με $R \le d \le 2R$.



α) Ποιο είναι το ελάχιστο δυνατό μέτρο της δύναμης *F* σε συνάρτηση με την απόσταση *d* και το ύψος *h;*

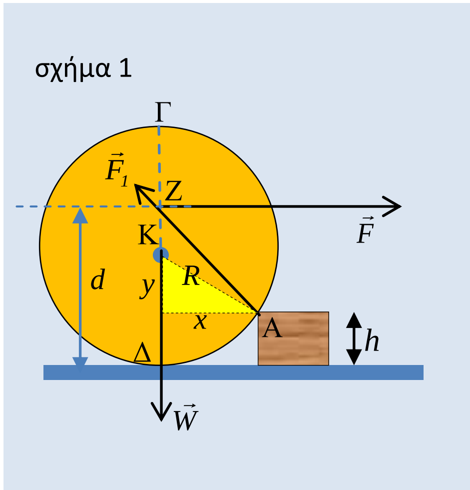
Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το ύψος του σκαλοπατιού είναι *h = R/2.*

β) Ποια είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης *F,* που υπολογίσατε στο ερώτημα (α);

γ) Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$ που ασκεί το σκαλοπάτι στο δίσκο;

δ) Ποια είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης $\vec{F}_1$, που υπολογίσατε στο ερώτημα (γ);

Απάντηση



α) Για να υπερπηδήσει ο κύλινδρος το σκαλοπάτι, πρέπει να χάσει την επαφή του με το οριζόντιο δάπεδο, δηλαδή στο σημείο επαφής Δ η αντίδραση να μηδενιστεί. Στο σχήμα 1 έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις τη στιγμή της υπερπήδησης. Το στερεό ισορροπεί, άρα οι δυνάμεις πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο Ζ, ώστε η συνισταμένη των ροπών τους να είναι μηδενική ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.

Στο κίτρινο ορθογώνιο τριγωνάκι:

$$y = R - h$$
$$x = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2Rh - h^2}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{h(2R-h)} \quad (1)$$

Οριακά λίγο πριν την αναπήδηση ο κύλινδρος ισορροπεί, άρα

$$\Sigma\vec{\tau}_A = 0 \Leftrightarrow -F\cdot(d-h) + W\cdot x = 0 \xrightarrow{(1)} F\cdot(d-h) = W\cdot\sqrt{h(2R-h)}$$
$$\Leftrightarrow F = \frac{W\cdot\sqrt{h(2R-h)}}{d-h} \quad (2)$$

β) Η σχέση *(2)*, για *h = R/2* και *d = R* δίνει μέγιστο μέτρο $F_{max} = \dfrac{W\cdot\sqrt{\frac{R}{2}(2R-\frac{R}{2})}}{R-\frac{R}{2}} \Leftrightarrow F_{max} = \dfrac{W\cdot\frac{R}{2}\sqrt{3}}{\frac{R}{2}} \Leftrightarrow F_{max} = W\sqrt{3}$

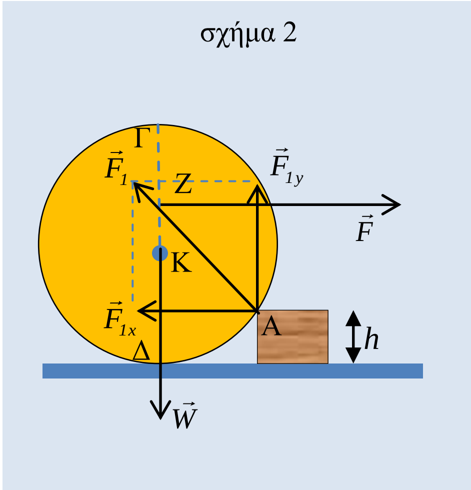
Η σχέση *(2)*, για *h = R/2* και *d = 2R* δίνει ελάχιστο μέτρο $F_{min} = \dfrac{W\cdot\sqrt{\frac{R}{2}(2R-\frac{R}{2})}}{2R-\frac{R}{2}} \Leftrightarrow F_{min} = \dfrac{W\cdot\frac{R}{2}\sqrt{3}}{\frac{3R}{2}} \Leftrightarrow F_{min} = W\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

γ) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$ μπορούμε να το βρούμε αν την αναλύσουμε σε συνιστώσες όπως στο σχήμα 2 και πάρουμε τις συνθήκες ισορροπίας για τις δυνάμεις.

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Leftrightarrow F - F_{1x} = 0 \Leftrightarrow F_{1x} = F$$

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow F_{1y} - W = 0 \Leftrightarrow F_{1y} = W$$

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^{\ 2} + F_{1y}^{\ 2}} \Leftrightarrow F_1 = \sqrt{F^2 + W^2}$$



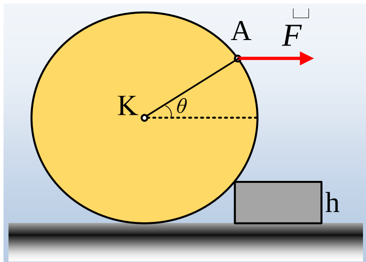
δ) Το μέγιστο μέτρο θα είναι

$$F_{1,max} = \sqrt{F_{max}^{\ 2} + W^2} = \sqrt{(W\sqrt{3})^2 + W^2} = 2W$$

Το ελάχιστο μέτρο θα είναι

$$F_{1,min} = \sqrt{F_{min}^{\ 2} + W^2} = \sqrt{(W\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + W^2} = \sqrt{\frac{W^2}{3} + W^2} = \frac{2W}{\sqrt{3}} = W\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

33) Ο ομογενής κύλινδρος του σχήματος, βάρους w=100N και ακτίνας R, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή με σκαλοπάτι ύψους h=0,4R. Σε μια στιγμή στο άκρο Α μιας ακτίνας, η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ=30°, ασκούμε μέσω νήματος, μια οριζόντια δύναμη F, μέτρου F=40N, όπως στο σχήμα και βλέπουμε τον κύλινδρο να παραμένει ακίνητος.



i) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο και να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί το σκαλοπάτι να είναι λείο.

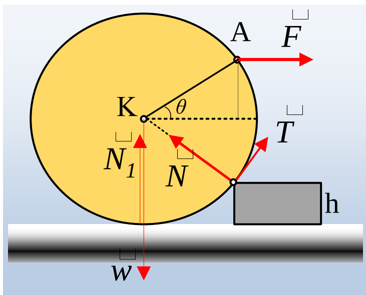
ii) Να υπολογίστε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο από το σκαλοπάτι.

iii) Πόση δύναμη δέχεται ο κύλινδρος από το οριζόντιο επίπεδο;

iv) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και σκαλοπατιού, για να εξασφαλίζεται η παραπάνω ισορροπία;

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, όπου η δύναμη από το εμπόδιο αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την κάθετη (στην επιφάνεια επαφής) αντίδραση Ν και την τριβή Τ.



Αν το σκαλοπάτι ήταν λείο, τότε η μόνη δύναμη η οποία θα είχε ροπή ως προς το κέντρο Κ του κυλίνδρου, θα ήταν η δύναμη F, αφού όλες οι υπόλοιπες δυνάμεις (w, N_1 και N) διέρχονται από το Κ. Αλλά τότε η συνολική ροπή ως προς Κ θα ήταν διάφορη του μηδενός και ο κύλινδρος δεν θα ισορροπούσε. Άρα για να εξουδετερώνεται η ροπή της F, θα πρέπει να ασκηθεί τριβή με κατεύθυνση όπως στο σχήμα.

ii) Από την ισορροπία του κυλίνδρου παίρνουμε ότι:

$$\Sigma F = 0 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \Sigma\tau = 0 \quad (2)$$

Από την εξίσωση (2) για τις ροπές ως προς το κέντρο Κ, παίρνουμε:

$$\tau_w + \tau_{N_1} + \tau_N + \tau_T + \tau_F = 0 \rightarrow$$

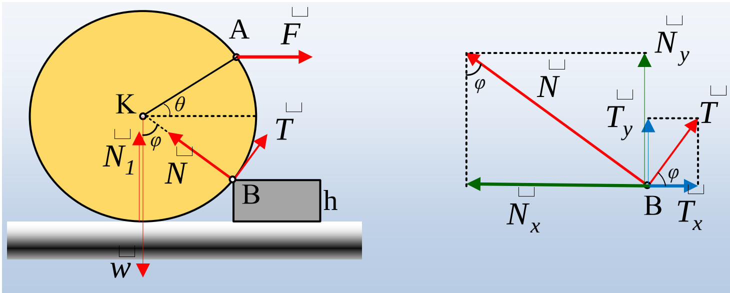
$$0 + 0 + 0 + T \cdot R - F \cdot R\eta\mu\theta = 0 \rightarrow$$

$$T = \frac{F \cdot R\eta\mu\theta}{R} = F \cdot \eta\mu\theta = 40 \cdot \frac{1}{2} N = 20N$$

iii) Αν Β το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το εμπόδιο, τότε για την γωνία φ που σχηματίζει η ακτίνα ΒΚ με την κατακόρυφο (στο παρακάτω σχήμα), ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{R-h}{R} = \frac{R-0{,}4R}{R} = 0{,}6 \rightarrow \quad \eta\mu\varphi = 0{,}8$$

Τότε, αν αναλύσουμε την κάθετη αντίδραση από το εμπόδιο και την τριβή σε δύο συνιστώσες, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, όπως εμφανίζονται αναλυτικά στο δεύτερο σχήμα, παίρνουμε:



$N_x = N \cdot \eta\mu\varphi$, $N_y = N \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ και $T_x = T \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$, $T_y = T \cdot \eta\mu\varphi$

Τότε η εξίσωση (1) από την ισορροπία του κυλίνδρου παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F - N_x + T_x = 0 \rightarrow N \cdot \eta\mu\varphi - T \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = F \rightarrow 0{,}8N = 0{,}6 \cdot 20N + 40N \rightarrow$$

$$N = 65N$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 + N_y + T_y - w = 0 \rightarrow N_1 = w - T_y - N \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 100N - 20 \cdot 0{,}8N - 65 \cdot 0{,}6N \rightarrow$$

$$N_1 = 45N$$

iv) Για να εξασφαλίζεται η παραπάνω ισορροπία, θα πρέπει η ασκούμενη τριβή από το εμπόδιο, να είναι στατική, οπότε:

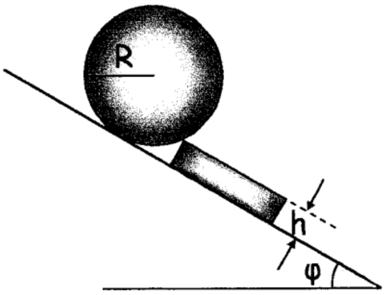
$$T \leq T_{o\rho} \rightarrow T \leq \mu_s N \rightarrow \mu_s \geq \frac{T}{N} \rightarrow$$

$$\mu_s \geq \frac{20N}{65N} \rightarrow \mu_s \geq \frac{4}{13}$$

34)

Η σφαίρα του σχήματος, ακτίνας R, αφήνεται στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ, σε επαφή με το εμπόδιο ύψους h. Για να μην υπερπηδήσει το εμπόδιο η σφαίρα, αν R = 5·h πρέπει :

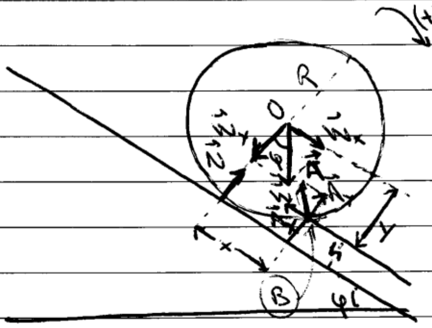
α. $εφφ \le \frac{1}{2}$ **β.** $εφφ \le \frac{3}{4}$ **γ.** $εφφ \le 1$



Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5



Ισορ.

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_x = A_x$

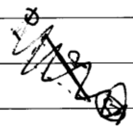
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w_y = N + A_y$

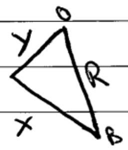
$\Sigma \tau^B = 0 \Rightarrow \tau_N^B + \tau_{w_x}^B + \tau_{w_y}^B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow N \cdot x + w ημφ\, y - w συνφ\, x = 0$

$\xrightarrow[N=0]{οριακά} εφφ = \frac{x}{y}$ (1)

$y = R - h$ (2)





$x^2 = R^2 - y^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} x = \sqrt{R^2-(R-h)^2} = \sqrt{R^2 - R^2 - h^2 + 2Rh} = \sqrt{h(2R-h)}$ (3)

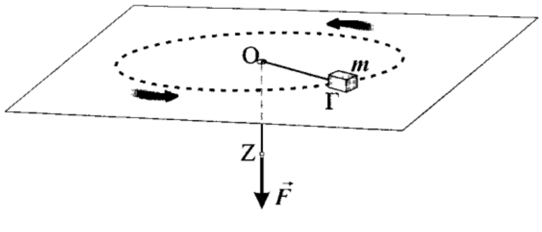
$(1)(2)(3) \Rightarrow εφφ = \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$ $\quad R=5h$

$= \frac{\sqrt{h(9h)}}{4h} = \frac{3h}{4h} = \frac{3}{4}$

Άρα πρέπει $εφφ \le \frac{3}{4}$

35)

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας μικρός κύβος μάζας $m = 0{,}2$ kg που είναι δεμένος σε αβαρές και μη εκτατό νήμα και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R = 0{,}4$ m πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Το νήμα διέρχεται από μια τρύπα του τραπεζιού και στο ελεύθερο άκρο του Z ασκούμε κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 18 N, κρατώντας με τον τρόπο αυτό σταθερή την ακτίνα της κίνησης του κύβου. Μετακινούμε προς τα κάτω κατά $h = 0{,}1$ m το ελεύθερο άκρο Z του νήματος, αυξάνοντας τη δύναμη που ασκούμε. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του μικρού κύβου, που θεωρείται υλικό σημείο, πριν και μετά τη μετακίνηση του ελεύθερου άκρου του νήματος.



Απ. υ=6m/s , υ΄=8 m/s

36) Στα άκρα μιας αβαρούς ράβδου μήκους ℓ=2m είναι στερεωμένες δυο σημειακές μάζες $m_1=m_2=m=1$ kg. Η ράβδος στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσο της με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1=10$ rad/s.

i. Να βρείτε τη στροφορμή των μαζών ως προς τον άξονα περιστροφής.
ii. Αν κάποιος μηχανισμός, ο οποίος δε δημιουργεί εξωτερικές ροπές στο σύστημα, μετακινήσει τις μάζες ταυτόχρονα σε χρόνο Δt=1 s σε απόσταση d=0,2 m από το μέσο της ράβδου, να βρείτε:
α) τη νέα γωνιακή ταχύτητα της ράβδου,
β)τη μέση ροπή που δέχθηκε η σημειακή μάζα m_1 από τον μηχανισμό.

Απ. i)$L_{ολ}$=20 kgm^2/s , ii) α) ω_2=250 rad/s , β) τ=0