ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

4º ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΡΕΥΣΤΑ - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1α. (α)   Α1β. (α)

Α2α. (β)   Α2β. (δ)

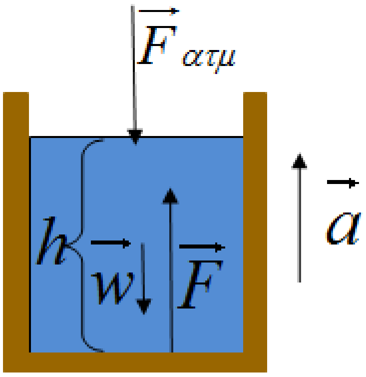
Α3α. (β)   Α3β. (β)

Α4α. (γ)   Α4β. (δ)

Α5. α. Λ   β. Σ   γ. Λ   δ. Σ   ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή επιλογή είναι η (β).



Το υγρό δέχεται στην διεύθυνση της κίνησης τρεις δυνάμεις.

Από την ατμόσφαιρα την $F_{ατμ}$, από τη Γη το βάρος του w και από τον πυθμένα την δύναμη F .

Εφαρμόζοντας τον 2º νόμο του Νεύτωνα για τη μάζα του νερού βρίσκουμε το μέτρο της δύναμης F .

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - w - F_{ατμ} = m \cdot a \Rightarrow F = F_{ατμ} + m \cdot g + m \cdot a \Rightarrow$$

$$F = F_{ατμ} + \rho \cdot V \cdot g + \rho \cdot V \cdot a \qquad (1)$$

όπου V ο όγκος του υγρού.

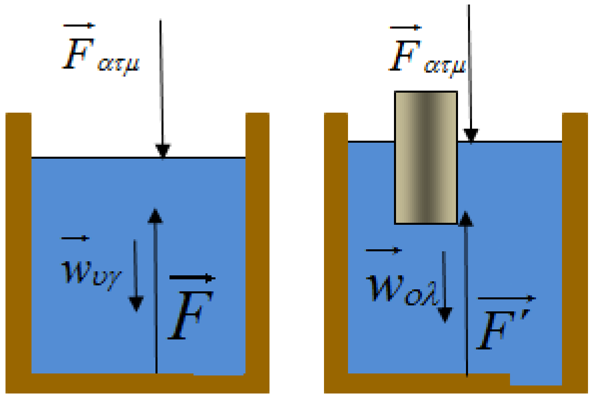
Όμως $V = A \cdot h$, όπου A το εμβαδόν του πυθμένα, έτσι η σχέση (1) γράφεται:

$$F = F_{ατμ} + \rho \cdot A \cdot h \cdot (g + a) \qquad (2)$$

Σύμφωνα με τον 3º νόμο του Νεύτωνα, το νερό θα ασκεί στον πυθμένα του δοχείου δύναμη F' ίδιου μέτρου με την F. Από τον ορισμό της πίεσης και τη βοήθεια της σχέσης (2) προκύπτει:

$$p = \frac{F'}{A} = \frac{F_{ατμ}}{A} + \rho \cdot h \cdot (g + a) \Rightarrow p = p_{ατμ} + \rho \cdot h \cdot (g + a) \Rightarrow \; p > p_{ατμ} + \rho g h \cdot$$

Β2. Σωστή επιλογή είναι η (α).



Σχήμα 1 Σχήμα 2

Στο σχήμα 1, η πίεση που επικρατεί στον πυθμένα είναι

$$p_1 = p_{ατμ} + ρgh \qquad (1)$$

Στο σχήμα 2, το σύστημα νερό -κύλινδρος βρίσκεται σε ισορροπία. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα νερό -κύλινδρος στον κατακόρυφο άξονα είναι:

η δύναμη από την ατμόσφαιρα, $F_{ατμ}$, τα δύο βάρη από την Γη και η δύναμη F από τον πυθμένα.

Ο 1ος νόμος του Νεύτωνα για τον κατακόρυφο άξονα για το σύστημα μας δίνει:

$$ΣF_{εξωτερ.} = 0 \Rightarrow F' - w_{κυλ} - w_{νερ} - F_{ατμ} = 0 \Rightarrow F' = w_{κυλ} + w_{υγ} + F_{ατμ}$$

Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, το νερό θα ασκεί στον πυθμένα του δοχείου δύναμη F' ίδιου μέτρου με την F. Άρα η πίεση που επικρατεί στον πυθμένα του δεύτερου δοχείου είναι:

$$p = \frac{F'}{A} = \frac{w_{κυλ} + w_{υγ} + F_{ατμ}}{A} \Rightarrow p = \frac{w_{κυλ}}{A} + \frac{ρ_{υγ} V_{υγ} g}{A} + \frac{F_{ατμ}}{A} \Rightarrow p = \frac{w_{κυλ}}{A} + ρ_{υγ} gh + P_{ατμ}$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1) προκύπτει:

$$p = p_1 + \frac{w}{A}$$

Β3. Η σωστή επιλογή είναι το (γ).

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

Σε χρονικό διάστημα Δt μια αντλία μεταφέρει ποσότητα νερού, Δm σε ύψος h και ταυτόχρονα της προσδίδει ταχύτητα υ. Το έργο της αντλίας είναι ίσο με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας συν την αύξηση της κινητικής ενέργειας της ποσότητας νερού Δm. Αφού οι δύο αντλίες έχουν ίδιες παροχές, ανεβάζουν ίδιο όγκο και ίδια μάζα νερού σε ίδιο χρονικό διάστημα.

Από τον μαθηματικό τύπο της παροχής, Π=Αυ, προκύπτει ότι μεγαλύτερη ταχύτητα εκροής του νερού έχουμε στην περίπτωση της αντλίας Β που έχει σωλήνα μικρότερης διατομής. Η αντλία Β λοιπόν, προκαλεί στον ίδιο χρονικό διάστημα ίδια αύξηση στην δυναμική ενέργεια του νερού αλλά μεγαλύτερη αύξηση στην κινητική του ενέργεια. Επομένως στο ίδιο χρονικό διάστημα παράγει περισσότερο έργο.

Άρα, $P_A < P_B$.

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

Σε χρονικό διάστημα Δt μια αντλία μεταφέρει ποσότητα νερού, Δm σε ύψος h και ταυτόχρονα της προσδίδει ταχύτητα υ. Το έργο της αντλίας είναι ίσο με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας συν την αύξηση της κινητικής ενέργειας της ποσότητας νερού Δm, δηλαδή:

$$\Delta W = \Delta m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon^2$$

Αν ΔV ο όγκος της ποσότητας, Π η παροχή και ρ η πυκνότητα του νερού, τότε:

$$\Delta W = \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot \upsilon^2 = \rho \cdot \Pi \cdot \Delta t \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho \cdot \Pi \cdot \Delta t \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

Αν με A συμβολίσουμε το εμβαδόν διατομής του σωλήνα, τότε από τον τύπο της παροχής έχουμε: $\Pi = A \cdot \upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{\Pi}{A}$ και η σχέση (1) γίνεται:

$$\Delta W = \rho \cdot \Pi \cdot \Delta t \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho \cdot \Pi \cdot \Delta t \cdot \frac{\Pi^2}{A^2}.$$

Άρα, η ισχύς της αντλίας είναι: $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \Rightarrow \; P = \rho \cdot \Pi \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho \cdot \frac{\Pi^3}{A^2}.$

Η σχέση αυτή μας δηλώνει ότι εφ' όσον οι δύο αντλίες έχουν ίδιες παροχές (ανεβάζουν ίδιο όγκο νερού σε ίδιο χρονικό διάστημα) μεγαλύτερη ισχύ θα έχει εκείνη με την μικρότερη διατομή Α.

Άρα $P_A < P_B$.

Β4. Η σωστή επιλογή είναι το (α).
Το σημείο Β είναι σημείο εκροής, οπότε $p_B = p_{\alpha\tau\mu}$.

Με εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία Γ και Β προκύπτει ότι η ταχύτητα εκροής είναι (θεώρημα Torricelli):

$$\upsilon_B = \sqrt{2g \cdot H} \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας την σχέση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία Α και Β προκύπτει:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 \qquad (2)$$

Όμως $p_A = p_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot h$, και $A_A \cdot \upsilon_A = A_B \cdot \upsilon_B$

Έτσι η (2) γράφεται:

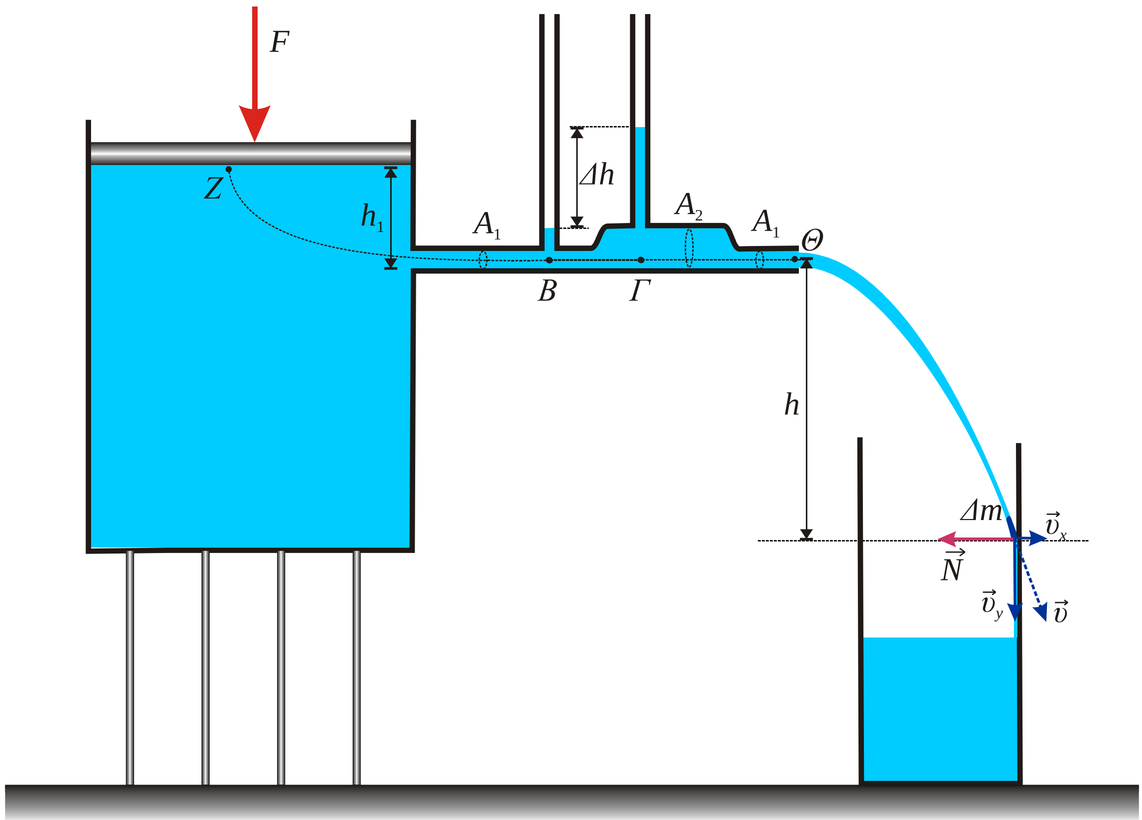
$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 \cdot \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2\right]$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1) η τελευταία σχέση δίνει:

$$\rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[1 - \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2\right] \Rightarrow \frac{h}{H} = 1 - \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2$$

Ο λόγος των δύο υψών εξαρτάται μόνο από τα εμβαδά των διατομών, άρα θα παραμείνει σταθερός.

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Η πίεση στο σημείο Β ισούται με την υδροστατική που οφείλεται στην κάθετη στήλη νερού ακριβώς πάνω από το σημείο Β:

$p_B = P_{atm} + \rho_\upsilon g \cdot \Delta h_B$, όπου Δh_B είναι το ύψος της στήλης του νερού από το σημείο Β μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στον κατακόρυφο σωλήνα.

Όμοια η πίεση στο σημείο Γ είναι : $p_\Gamma = P_{atm} + \rho_\upsilon g \cdot \Delta h_\Gamma$.

Οπότε, η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων Γ και Β είναι:

$$p_\Gamma - p_B = \rho_\upsilon g \cdot (\Delta h_\Gamma - \Delta h_B) = \rho_\upsilon g \cdot \Delta h \Rightarrow$$

$$p_\Gamma - p_B = \left(10^3\,\frac{N}{m^2}\right)\cdot\left(10\frac{m}{s^2}\right)\cdot(0{,}15m) \Rightarrow p_\Gamma - p_B = 1500\ N/m^2$$

Γ2. Για την οριζόντια φλέβα νερού που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho_\upsilon \upsilon_B^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho_\upsilon \upsilon_\Gamma^2 \Rightarrow \upsilon_B^2 - \upsilon_\Gamma^2 = \frac{2\cdot(p_\Gamma - p_B)}{\rho_\upsilon} \qquad (1)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας προκύπτει:

$$\Pi_B = \Pi_\Gamma \Rightarrow A_1\cdot\upsilon_B = A_2\cdot\upsilon_\Gamma \Rightarrow A_1\cdot\upsilon_B = 2A_1\cdot\upsilon_\Gamma \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \upsilon_B/2$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_B^2 - \left(\frac{\upsilon_B}{2}\right)^2 = \frac{2\cdot(p_\Gamma - p_B)}{\rho_\upsilon} \Rightarrow \upsilon_B = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{2\cdot(p_\Gamma - p_B)}{\rho_\upsilon}} = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{2\cdot 1500N/m^2}{10^3Kg/m^2}} \Rightarrow \upsilon_B = 2\frac{m}{s}$$

Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων Β και Θ προκύπτει ότι η ταχύτητα εκροής είναι $\upsilon_1 = \upsilon_B = 2\,m/s$.

<u>Παρατήρηση:</u> Από την εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli στην οριζόντια φλέβα νερού που περνάει από τα σημεία Β και Θ, προκύπτει ότι: $\Delta h_B = 0\,m$

Γ3. Από την ισορροπία του αβαρούς εμβόλου έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F + P_{atm}\cdot A = p_Z\cdot A \Rightarrow F/A = p_Z - P_{atm}$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli σε μία φλέβα που διέρχεται από τα σημεία Ζ και Θ παίρνουμε:

$$p_Z + \frac{1}{2}\rho_\upsilon\upsilon_Z^2 + \rho_\upsilon g h_Z = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho_\upsilon\upsilon_1^2 + \rho_\upsilon g h_\Theta$$

Όπου h_Z και h_Θ είναι τα ύψη στα οποία βρίσκονται τα σημεία Ζ και Θ αντίστοιχα, για τα οποία ισχύει ότι: $h_Z - h_\Theta = h_1$. Επειδή το δοχείο είναι μεγάλο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η στάθμη του νερού σε αυτό (ουσιαστικά) δεν κατεβαίνει: $\upsilon_Z = 0$. Οπότε:

$$\frac{F}{A} = p_Z - P_{atm} = \frac{1}{2}\rho_\upsilon\upsilon_1^2 - \rho_\upsilon g h_1 \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{1}{2}\left(10^3\frac{kg}{m^3}\right)\cdot\left(2\frac{m}{s}\right)^2 - \left(10^3\frac{kg}{m^3}\right)\cdot\left(10\frac{m}{s^2}\right)\cdot(0{,}15m) \Rightarrow \frac{F}{A} = 500\frac{N}{m^2}$$

Γ4. Έστω μια μικρή ποσότητα νερού μάζας Δm που προσπίπτει στο δεξιό κάθετο τοίχωμα του δοχείου με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Επειδή δεν υπάρχουν τριβές με το τοίχωμα, η (μέση) δύναμη, *N*, που δέχεται από το τοίχωμα έχει διεύθυνση που είναι κάθετη στο τοίχωμα και επηρεάζει μόνο την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του.

Αν στον οριζόντιο άξονα η κατεύθυνση προς τα δεξιά θεωρηθεί θετική, τότε σύμφωνα με τον 2° νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\mathrm{N}=\frac{\Delta p_x}{\Delta t}=\frac{0-p_x}{\Delta t}=-\frac{\Delta m\upsilon_x}{\Delta t}\Rightarrow \mathrm{N}=-\frac{\Delta m}{\Delta t}\cdot\upsilon_x=-\frac{\rho_\upsilon\,\Delta V}{\Delta t}\cdot\upsilon_x\Rightarrow \mathrm{N}=-\rho_\upsilon\Pi_1\cdot\upsilon_x \qquad (2)$$

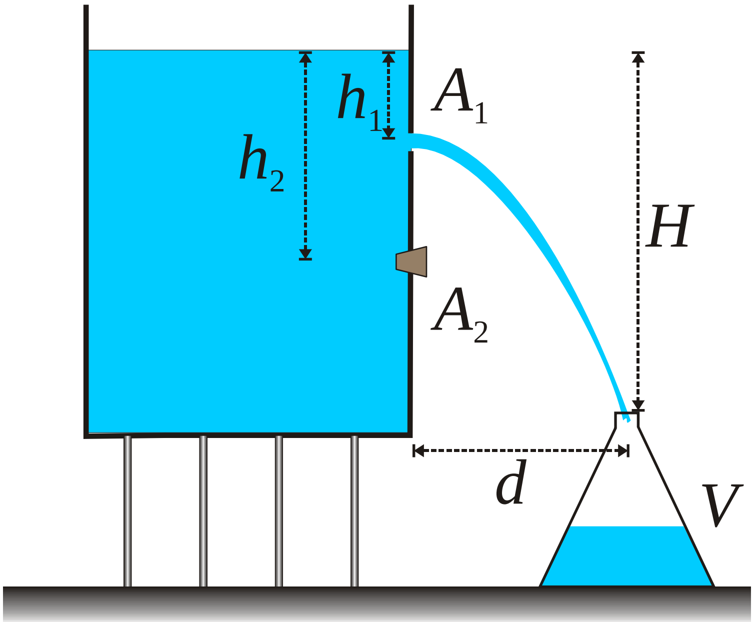
Όμως $\upsilon_x=\upsilon_1=2\,\mathrm{m/s}$ και $\Pi_1=A_1\cdot\upsilon_1=\left(0,5\times10^{-4}\mathrm{m}^2\right)\cdot\left(2\mathrm{m/s}\right)\Rightarrow \Pi_1=1\times10^{-4}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.

Με αριθμητική αντικατάσταση στη σχέση (2) προκύπτει ότι η δύναμη που ασκεί το κατακόρυφο τοίχωμα του δοχείου στο νερό έχει μέτρο $\mathrm{N}=0,2\ \mathrm{N}$, οριζόντια διεύθυνση και φορά προς τα αριστερά.

Σύμφωνα με τον 3° νόμο του Νεύτωνα, δράση-αντίδραση, η δύναμη που ασκεί το νερό στο τοίχωμα θα έχει μέτρο $\mathrm{N}'=0,2\ \mathrm{N}$, οριζόντια διεύθυνση και φορά προς τα δεξιά.

Παρατήρηση: Η δύναμη είναι ανεξάρτητη από το ύψος h.

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Η ταχύτητα με την οποία εκρέει το νερό από την οπή υπολογίζεται από το θεώρημα Torricelli: $\upsilon_1=\sqrt{2gh_1}=1\,m/s$. Οπότε, η παροχή του νερού από την οπή είναι: $\Pi_1=A_1\upsilon_1=5\times10^{-5}\ m^3/s$

Με την παροχή αυτή, το μικρό δοχείο γεμίζει σε χρονικό διάστημα

$$\Delta t=\frac{V}{\Pi_1}=\frac{700\times10^{-6}\ m^3}{5\times10^{-5}\ m^3/s}\Rightarrow\Delta t=14\ s.$$

Δ2. Το νερό εκτινασσόμενο από την οπή εκτελεί οριζόντια βολή. Ο χρόνος καθόδου από την οπή μέχρι το στόμιο του μικρού δοχείου υπολογίζεται από την ελεύθερη πτώση που συμβαίνει στον κατακόρυφο άξονα:

$$H-h_1=\frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2\cdot(H-h_1)}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1,8m}{10m/s^2}} \Rightarrow t_1=0,6\,s$$

Στο χρόνο t_1 το νερό μετατοπίζεται οριζόντια κατά απόσταση $d=\upsilon_1 t_1=0,6\,m$.

Δ3. Προκειμένου να γεμίζει το μικρό δοχείο σε μικρότερο χρονικό διάστημα πρέπει το νερό από τη δεύτερη οπή να προσπίπτει στο στόμιο του μικρού δοχείου, δηλαδή να έχει την ίδια οριζόντια μετατόπιση με την πρώτη φλέβα.

Το νερό από τη δεύτερη οπή εκτινάσσεται με ταχύτητα $\upsilon_2=\sqrt{2gh_2}$, εκτελεί οριζόντια βολή με χρόνο καθόδου $t_2=\sqrt{\frac{2\cdot(H-h_2)}{g}}$ και έχει οριζόντια μετατόπιση που βρίσκεται από τη σχέση.

$$d=\upsilon_2 t_2 \Rightarrow 0,6=\sqrt{2gh_2}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot(H-h_2)}{g}} \Rightarrow 0,6=2\sqrt{h_2\cdot(1,85-h_2)} \Rightarrow h_2^2-1,85h_2+0,09=0$$

Το τριώνυμο $f(x)=x^2-1,85x+0,09$ έχει 2 ρίζες, που αντιστοιχούν στα ύψη h_1 και h_2.

Οπότε,

$$\mathrm{x}=\frac{1,85\pm\sqrt{1,85^2-4\cdot 0,09}}{2} \Rightarrow \mathrm{x}=\frac{1,85\pm\sqrt{3,0625}}{2} \Rightarrow \mathrm{x}=\frac{1,85\pm 1,75}{2} \Rightarrow \mathrm{x}=1,8 \text{ ή } \mathrm{x}=0,05.$$

Άρα, $\mathrm{h_2}=1,8\,\mathrm{m}=180\,\mathrm{cm}$

Δ4. Όταν οι δύο οπές ανοίξουν ταυτόχρονα, η συνολική παροχή νερού θα είναι: $\Pi_{o\lambda}=\Pi_1+\Pi_2$ με $\Pi_1=5\times10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}$ και $\Pi_2=\mathrm{A_2}\upsilon_2=\mathrm{A_1}\sqrt{2\mathrm{gh_2}}=30\times10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}$.

οπότε $\Pi_{o\lambda}=35\times10^{-5}\ m^3/s$.

Για να εκρεύσει νερό όγκου $V=700\ cm^3$ απαιτείται χρονικό διάστημα

$$\Delta t'=\frac{\mathrm{V}}{\Pi_{o\lambda}}=\frac{700\times10^{-6}\ \mathrm{m^3}}{35\times10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}}=\frac{70}{35} \Rightarrow \Delta t'=2\ \mathrm{s}$$ και θα πρέπει να κλείσουμε τις δύο οπές ταυτόχρονα

τη χρονική στιγμή $t=\Delta t'$.

Τη χρονική στιγμή που κλείνουμε τις οπές, υπάρχει ακόμη νερό στον αέρα.

Από την πρώτη οπή το νερό χρειάζεται $t_1 = 0{,}6\ s$ για να μπει στο μικρό δοχείο ενώ από τη δεύτερη οπή το νερό χρειάζεται $\mathrm{t_2} = \sqrt{\dfrac{2\cdot(\mathrm{H}-\mathrm{h_2})}{\mathrm{g}}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 0{,}05\mathrm{m}}{10\mathrm{m/s^2}}} = 0{,}1\,\mathrm{s}$.

Οπότε το μικρό δοχείο θα γεμίσει πλήρως τη χρονική στιγμή

$t = \Delta t' + t_1 = 2s + 0{,}6s \Rightarrow t = 2{,}6\ s$.

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:
Τα θέματα επιμελήθηκαν οι **Κυριακόπουλος Γιάννης, Τσάδαρης Θανάσης, Χατζηθεοδωρίδης Στέλιος, Φυσικοί.**
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον **Παλόγο Αντώνιο, Φυσικό.**