

ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

2^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1α. (α) A1β. (γ)

A2α. (γ) A2β. (δ)

A3α. (α) A3β. (β)

A4α. (γ) A4β. (β)

A10. α.Λ β.Λ γ.Σ δ.Λ ε.Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Όταν αφήσουμε κάθε σώμα από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου να κάνει ταλάντωση, το πλάτος Α θα ισούται με την αρχική επιμήκυνσή του $\Delta\ell$.

Στη θέση ισορροπίας έχουμε: $\Sigma F = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta\ell - mg = 0 \Rightarrow \Delta\ell = A = \frac{mg}{k}$, (1)

Η κινητική ενέργεια στη θέση ισορροπίας είναι μέγιστη και ίση με την ενέργεια ταλάντωσης, επομένως

$$K = K_{\max} = U_{\max} \Rightarrow K = \frac{1}{2}kA^2, (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη (2) παίρνουμε: $K = \frac{m^2g^2}{2k}$

Για το σώμα Α έχουμε $K_A = \frac{m_A^2g^2}{2k}$

Για το σώμα Β έχουμε $K_B = \frac{m_B^2g^2}{2k}$

Επειδή $m_B > m_A$ παίρνουμε $K_B > K_A$.

B2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

$$E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = 0,5J, (1)$$

$$E_1 = E_0 - Q = 0,08J \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2 = 0,08J, (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1),(2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}kA_1^2}{\frac{1}{2}kA_0^2} \Rightarrow \frac{0,08}{0,5} = \frac{A_1^2}{A_0^2} \Rightarrow \frac{8}{50} = \frac{A_1^2}{A_0^2} \Rightarrow \frac{16}{100} = \frac{A_1^2}{A_0^2} \Rightarrow A_1 = 0,4A_0.$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντωτή είναι $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό, άρα ο διεγέρτης βρίσκεται σε συχνότητα f_0 και το πλάτος ταλάντωσης είναι A_{max} .

Αν το ελατήριο αντικατασταθεί με ένα σκληρότερο σταθεράς $k' > k$, η νέα ιδιοσυχνότητα γίνεται

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k'}{m}},$$

Είναι $f'_0 > f_0$,

επομένως το μέγιστο της καμπύλης συντονισμού μετατοπίζεται δεξιότερα. Ο διεγέρτης βρίσκεται στη συχνότητα f_0 , άρα το πλάτος ταλάντωσης από A_{max} γίνεται $A_1 < A_{max}$ (δες σχήμα).



B4. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Οι δύο ταλαντώσεις έχουν ίδια συχνότητα και διαφορά φάσης $\Delta\phi = 2\pi/3$ rad.

Η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \theta), (1)$$

όπου το πλάτος A της ταλάντωσης είναι

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} = \sqrt{(4\text{m})^2 + (4\text{m})^2 + 2 \cdot 4\text{m} \cdot 4\text{m} \cdot \cos\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow A = 4\text{m}$$

Η γωνία θ δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{A_2 \eta \mu \Delta\varphi}{A_1 + A_2 \cos \Delta\varphi} = \frac{4\text{m} \cdot \eta \mu \frac{2\pi}{3}}{4\text{m} + 4\text{m} \cdot \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{rad}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$x = 4 \cdot \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{3} \right), \text{ (SI.)}$$

Όταν η απομάκρυνση μηδενίζεται έχουμε

$$0 = 4 \cdot \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{3} \right) = \eta \mu 0 \Rightarrow 10t + \frac{\pi}{3} = \kappa\pi$$

Για 1^η φορά ($\kappa=1$) η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$10t + \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{15} \text{s}$$

ΘΕΜΑ Γ

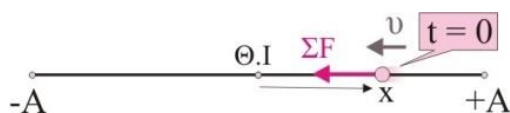
Γ1)

Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f = \frac{f'}{2} = \frac{5}{\pi} \text{Hz}$ άρα $\omega = 2\pi f = 10 \text{rad/s}$.

$$D = m\omega^2 = 1\text{kg} \cdot \left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \quad \text{ή} \quad D = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Γ2)

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t=0$ ο ρυθμός μεταβολής της ορμής (η συνισταμένη δύναμη ΣF) είναι αρνητικός το σώμα βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση. Το σώμα επιταχύνεται, άρα πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του.



$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow -20\text{N} = -100 \frac{\text{N}}{\text{m}} x \Rightarrow x = 0,2\text{m}$$

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση.

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{x^2 + \frac{mv^2}{D}} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{(0,2\text{m})^2 + \frac{1\text{kg} \cdot \left(2\sqrt{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{100\frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow A = 0,4\text{m}$$

Γ3)

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο είναι

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0), \quad (1) \quad \text{όπου } A=0,4\text{m} \text{ και } \omega=10\text{rad/s.}$$

Εύρεση της αρχικής φάσης φ_0 .

Τη χρονική στιγμή $t=0$, $x=0,2\text{m}$ και $v<0$.

$$0,2 = 0,4 \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} = \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$\eta\mu\frac{5\pi}{6} = \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}, \quad (3)$$

Επειδή η ταχύτητα τη στιγμή $t=0$ είναι αρνητική, επιλέγουμε τη $\varphi_0=5\pi/6$.

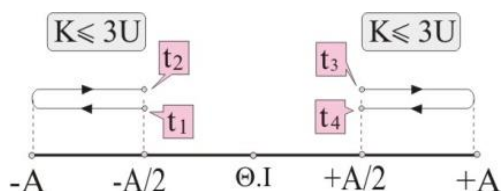
Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$x = 0,4 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right), \quad (\text{SI.})$$

Γ4)

$$\left. \begin{array}{l} K \leq 3U \\ K + U = E \Rightarrow K = E - U \end{array} \right\} E - U \leq 3U \Rightarrow U \geq \frac{E}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 \geq \frac{1}{4} \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow |x| \geq \frac{A}{2}$$

Το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση $A/2$. Θα φτάσει για πρώτη φορά στη θέση $-A/2$ τη χρονική στιγμή t_1 και θα επιστρέψει σε αυτή τη στιγμή t_2 . Θα ισχύει $K \leq 3U$ για το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_2 - t_1$. Στη συνέχεια θα φτάσει στη θέση $+A/2$ τις στιγμές t_3 και t_4 (δες σχήμα) όπου και πάλι θα ισχύει $K \leq 3U$ για το χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_4 - t_3$.



Για $x=-A/2$:

$$-\frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει 2 λύσεις.

$$\eta\mu\frac{7\pi}{6} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 2k\pi + \frac{7\pi}{6} = 10t + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{(k=0)} t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$$

$$\eta\mu\frac{11\pi}{6} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 2k\pi + \frac{11\pi}{6} = 10t + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{(k=0)} t_2 = \frac{3\pi}{30} \text{ s}$$

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{30} \text{ s}$$

Για $x=A/2$:

$$\frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει 2 λύσεις.

$$\eta\mu\frac{\pi}{6} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{6} = 10t + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{(k=1)} t_3 = \frac{4\pi}{30} \text{ s}$$

$$\eta\mu\frac{5\pi}{6} = \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 2k\pi + \frac{5\pi}{6} = 10t + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{(k=1)} t_4 = \frac{6\pi}{30} \text{ s}$$

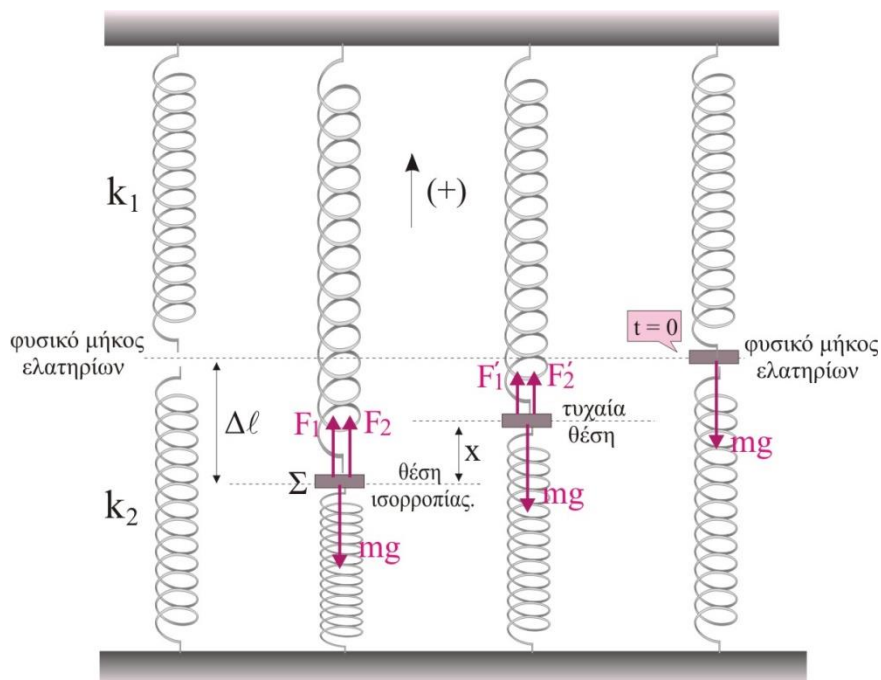
$$\Delta t_2 = t_4 - t_3 = \frac{2\pi}{30} \text{ s}$$

Το χρονικό διάστημα στη διάρκεια μιας περιόδου που ικανοποιείται η σχέση $K \leq 3U$, είναι

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\pi/15 \text{ s.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1)



Στη θέση ισορροπίας όπου τα ελατήρια έχουν παραμορφωθεί κατά $\Delta\ell$ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 - mg = 0 \Rightarrow k_1\Delta\ell + k_2\Delta\ell = mg \Rightarrow 2k\Delta\ell = mg, \quad (1)$$

Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης που απέχει x από τη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = F'_1 + F'_2 - mg = k(\Delta\ell - x) + k(\Delta\ell - x) - mg \Rightarrow$$

$$\Sigma F = 2k\Delta\ell - 2kx - mg \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -2kx$$

Άρα το Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D=2k$.

Δ2)

Τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα Σ βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση (+A), τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος και δεν έχουν δυναμική ενέργεια. Όταν το ελατήριο 1 έχει τη μέγιστη δυναμική του ενέργεια το σώμα Σ βρίσκεται στην κάτω αρνητική του θέση (-A) για πρώτη φορά. Άρα, το χρονικό διάστημα $\Delta t = \pi/10\text{s}$ αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα μισής περιόδου της ταλάντωσης του Σ .

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{10} \Rightarrow \pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi}{10} \Rightarrow \frac{m}{2k} = \frac{1}{100} \Rightarrow k = 100\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $\Delta\ell = A = \frac{mg}{2k} = 0,1\text{m}$

Δ3)

Βρίσκουμε πρώτα την εξίσωση θέσης για την ταλάντωση του σώματος Σ.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα Σ είναι στο $x=+A$, άρα $\varphi_0=\pi/2$.

$$\text{Επίσης } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η εξίσωση θέσης του σώματος Σ είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ (SI)}$$

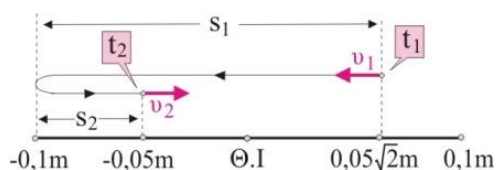
Τη χρονική στιγμή $t_1=T/8$:

$$x_1 = 0,1\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,1\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0,05\sqrt{2}\text{ m}, \quad v_1 = v_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$$

Τη χρονική στιγμή $t_2=2T/3$:

$$x_2 = 0,1\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2T}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,1\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -0,05\text{ m}, \quad v_2 = v_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{6}\right) > 0$$

Το μήκος της τροχιάς που διένυσε το σώμα Σ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη στιγμή t_2 (δες σχήμα) είναι



$$s_{\text{ολ}} = s_1 + s_2 = 0,05\sqrt{2}\text{ m} + 0,01\text{ m} + (0,01\text{ m} - 0,05\text{ m}) \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 0,05(\sqrt{2} + 3)\text{ m}$$

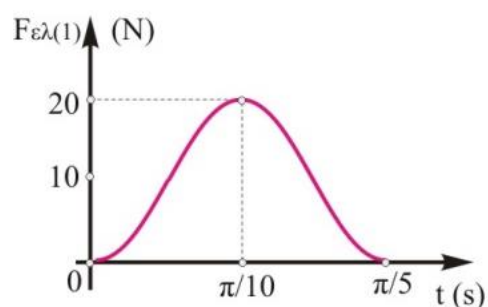
Δ4)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{\pi}{5}\text{ s}$$

Άρα, η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε χρόνο από 0 μέχρι T. Στην τυχαία θέση που η απομάκρυνση του σώματος είναι x από τη θέση ισορροπίας έχουμε

$$F_1 = k_1(\Delta\ell - x) = k_1\Delta\ell - k_1A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow F_1 = 10 - 10\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ (SI)}$$

Η γραφική παράσταση της δύναμης του ελατηρίου (1) σε σχέση με το χρόνο δίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ5)

$$\frac{dU_1}{dt} = -\frac{dW_{F_1}}{dt} = -\frac{F_1 dx}{dt} = -F_1 \cdot v_1, \quad (2)$$

Την $t_1=5T/6$:

$$F_1 = 10 - 10\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{5T}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 10 - 10\eta\mu\frac{13\pi}{6} = 10 - 10\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow F_1 = 5\text{N}$$

Η ταχύτητα v_1 του σώματος Σ τη χρονική στιγμή $5T/6$ είναι

$$v_1 = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{5T}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,1\text{m} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{6} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) παίρνουμε

$$\frac{dU_1}{dt} = -5\text{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dU_1}{dt} = -2,5\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι Ιστάπολος Βασίλειος και Ποντικός Ηλίας, Φυσικοί.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον Παλόγο Αντώνιο, Φυσικό.