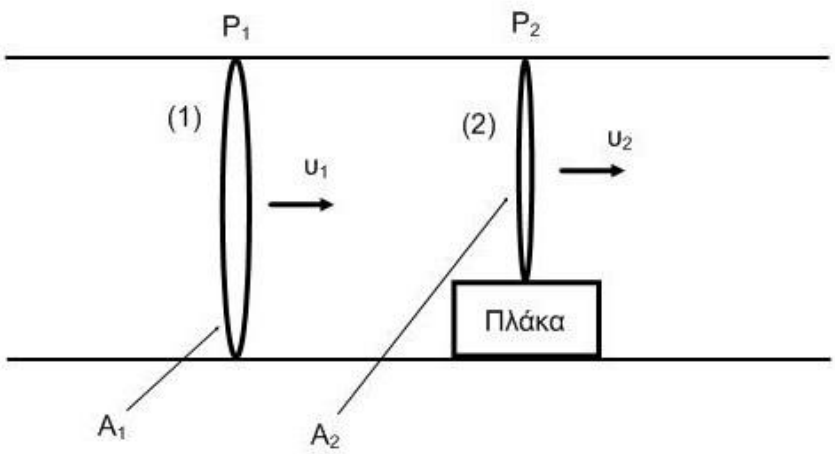
1) Στην αρτηριοσκλήρωση , στα τοιχώματα των αρτηριών επικάθεται η ονομαζόμενη πλάκα με αποτέλεσμα η διατομή της αρτηρίας να μειώνεται .



α. Αν τα εμβαδά των διατομών είναι A_1 και A_2 αντιστοίχως ποια η σχέση των ταχυτήτων $υ_1$ και $υ_2$.
β. Υπολογίστε την διαφορά της πίεσης του αίματος μεταξύ των σημείων (1) και (2) .
γ. Εφαρμογή : Να γίνουν οι υπολογισμοί στην περίπτωση που η ακτίνα μιας αρτηρίας υποτριπλασιάζεται , η μέση τιμή ταχύτητας ροής στο ευρύ τμήμα της αρτηρίας είναι 50 cm / s ενώ η πυκνότητα του αίματος είναι ρ = 1.050 kg / m³ .

Λύση

α.

Από την εξίσωση της συνέχειας :
(Π = dV / dt = σταθερό , κατά μήκος μιας φλέβας ροής)
$A_1 \cdot υ_1 = A_2 \cdot υ_2 \Rightarrow$
$υ_2 = (A_1 / A_2) \cdot υ_1$.

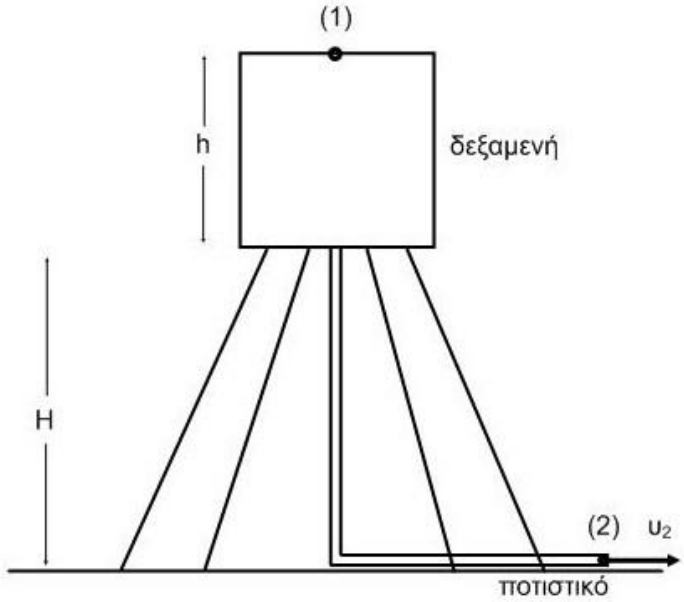
β.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για οριζόντιο σωλήνα .
$P + ½ \cdot ρ \cdot υ^2 =$ σταθερό . Για τα σημεία (1) και (2) , έχουμε :
$P_1 + ½ \cdot ρ \cdot υ_1^2 = P_2 + ½ \cdot ρ \cdot υ_2^2 \Rightarrow$
$P_1 - P_2 = ½ \cdot ρ \cdot (υ_2^2 - υ_1^2) \Rightarrow$
από το προηγούμενο ερώτημα ,
$P_1 - P_2 = ½ \cdot ρ \cdot ((A_1 / A_2)^2 \cdot υ_1^2 - υ_1^2) \Rightarrow$
$P_1 - P_2 = ½ \cdot ρ \cdot υ_1^2 \cdot [(A_1^2 / A_2^2) - 1]$.

γ.

Υπολογίζουμε τα εμβαδά των διατομών A_1 και A_2 :
$A_1 = π \cdot r_1^2$ και
$A_2 = π \cdot r_2^2 \Rightarrow$
$A_2 = π \cdot (r_1 / 3)^2 \Rightarrow$
$A_2 = π \cdot (r_1^2 / 9) \Rightarrow$
$A_2 = A_1 / 9 \Rightarrow$
$(A_1 / A_2)^2 = 9^2 \Rightarrow$
$(A_1 / A_2)^2 = 81$.
Δίνεται
$υ_1 = 50$ cm / s $\Rightarrow$
$υ_1 = 0,5$ m / s ,
άρα :
από το προηγούμενο ερώτημα ,
$P_1 - P_2 = ½ \cdot ρ \cdot υ_1^2 \cdot [(A_1^2 / A_2^2) - 1] \Rightarrow$
$P_1 - P_2 = ½ \cdot 1050 \cdot (0,5)^2 \cdot (9^2 - 1) \Rightarrow$
$P_1 - P_2 = 10.500$ N / m² ή Pα
ή $P_1 - P_2 = 10,5$ KPα .

2) Μια κυλινδρική δεξαμενή ακτίνας 6 m και ύψους h = 5 m είναι γεμάτη με νερό , βρίσκεται στην κορυφή ενός πύργου ύψους 45 m και χρησιμοποιείται για το πότισμα ενός χωραφιού .



α. Ποια η παροχή του νερού από ένα ποτιστικό διαμέτρου 2 cm που βρίσκεται στο έδαφος του χωραφιού ;
β. Αν θεωρήσουμε ότι η παροχή παραμένει σταθερή , μετά από πόση ώρα θα χρειαστεί η δεξαμενή και πάλι γέμισμα ;
Λύση
α.
Για τα σημεία (1) και (2) εφαρμόζουμε την εξίσωση της συνέχειας :
$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$
$\upsilon_1 = (A_2 / A_1) \cdot \upsilon_2$.
Επειδή $A_2 / A_1 << 1$ τότε και $\upsilon_1 << \upsilon_2$,
οπότε θεωρούμε το $\upsilon_1 = 0$.
Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία (1) και (2) :
$P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 + \rho \cdot g \cdot H = P_2 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 + \rho \cdot g \cdot 0 \Rightarrow$
όπου $\upsilon_1 = 0$ και $P_1 = P_2 = P_{atm}$,
$\upsilon_2 = \sqrt{[2 \cdot g \cdot (H + h)]} \Rightarrow$
$\upsilon_2 = \sqrt{(2 \cdot 10 \cdot 45)} \Rightarrow$
$\upsilon_2 = 30$ m / s .
Η παροχή του ποτιστικού είναι :
$\Pi_2 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$
$\Pi_2 = \pi \cdot (\delta / 2)^2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$
$\Pi_2 = \pi \cdot (2 \cdot 10^{-2} / 2)^2 \cdot 30 \Rightarrow$
$\Pi_2 = 3 \cdot \pi \cdot 10^{-3}$ m³ / s .
β.
Υπολογίζουμε τον χρόνο για το άδειασμα της δεξαμενής :
$\Pi = dV / dt \Rightarrow$
$\Pi = V / t \Rightarrow$
$t = (A \cdot h) / \Pi_2 \Rightarrow$
$A = \pi \cdot R^2$,
$t = [(\pi \cdot R^2) \cdot h) / \Pi_2 \Rightarrow$
$t = \pi \cdot 6^2 \cdot 5 / (3 \cdot \pi \cdot 10^{-3}) \Rightarrow$
t = 60.000 s ή 16 h και 40 min .

3) Ένα λάστιχο με εσωτερική κυκλική διατομή ακτίνας 0,6 cm , συνδέεται με βρύση στο ισόγειο και μεταφέρει το νερό στην ταράτσα κτηρίου ύψους 10 m .
Αν το στόμιο εκροής είναι κυκλικό και έχει ακτίνα 0,15 cm , ενώ η ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται το νερό είναι 8 m / s , να υπολογιστούν :
α. Η ταχύτητα του νερού στο λάστιχο ,
β. Η πίεση του νερού στη θέση του στομίου της βρύσης .
Η ροή να θεωρηθεί χωρίς τριβές ,
επίσης δίνονται : g = 10 m / s² , $\rho = 10^3$ kg / m³ και $P_{at} = 10^5$ Pα .

Λύση

α.

Από την εξίσωση της συνέχειας :

$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = (A_2 / A_1) \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = [\pi \cdot r_2^2 / (\pi \cdot r_1^2)] \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = [0{,}0225 \cdot 10^{-4} / (0{,}36 \cdot 10^{-4})] \cdot 8 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = (2{,}25 / 36) \cdot 8 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = 18 / 36 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = 0{,}5 \text{ m / s}$.

β.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli :

$P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 + \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow$

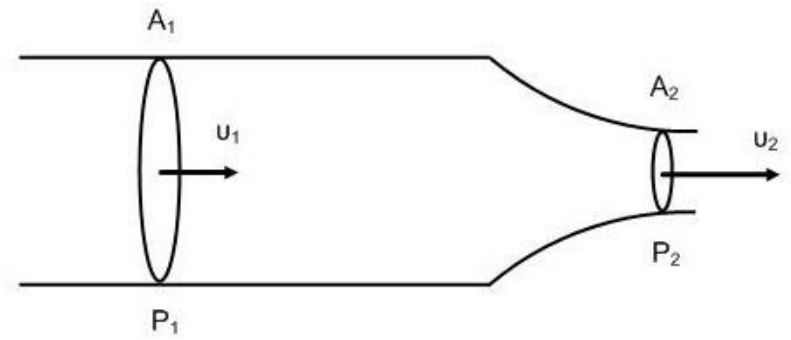
$P_1 = P_{at} + ½ \cdot \rho \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) + \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow$

$P_1 = 10^5 + ½ \cdot 10^3 \cdot (64 - 0{,}25) + 10^3 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow$

$P_1 = 2 \cdot 10^5 + 31{,}875 \cdot 10^3 \Rightarrow$

$P_1 = 2{,}32 \cdot 10^5$ Pα (με προσέγγιση εκατοστού) .

4) Στον οριζόντιο σωλήνα που φαίνεται στην εικόνα ,



ρέει ιδανικό υγρό πυκνότητας ρ , του οποίου η ταχύτητα και η πίεση στην εγκάρσια διατομή A_1 είναι υ_1 και P_1 αντίστοιχα .

Να βρείτε στην εγκάρσια διατομή A_2 :

α. Την ταχύτητα υ_2 ,

β. Την πίεση P_2 .

Τα μεγέθη A_1 , A_2 , υ_1 , P_1 , ρ να θεωρηθούν γνωστά .

Λύση

α.

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε :

$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$

$\upsilon_2 = (A_1 / A_2) \cdot \upsilon_1 \ldots$ (I) .

β.

Από την εξίσωση του Bernoulli για $h_1 = h_2$:

$P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$

$P_2 = P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 - ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$

$P_2 = P_1 + ½ \cdot \rho \cdot (\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) \Rightarrow$

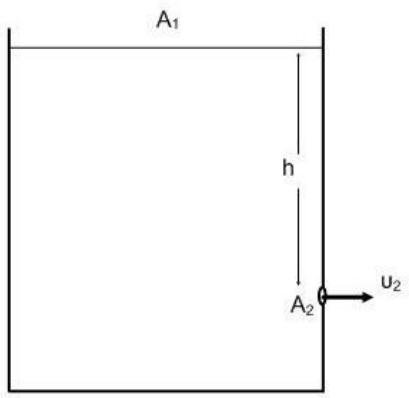
από την εξίσωση (I) ,

$P_2 = P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \{\upsilon_1^2 - [(A_1 / A_2) \cdot \upsilon_1]^2\} \Rightarrow$

$P_2 = P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \cdot \{(A_2^2 - A_1^2) / A_2^2\} \Rightarrow$

$P_2 = P_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \cdot \{1 - (A_1 / A_2)^2\}$.

5) Στη δεξαμενή νερού της εικόνας υπάρχει μια τρύπα σε βάθος h = 5 m . Μια βρύση στο πάνω μέρος τροφοδοτεί τη δεξαμενή με νερό .



Ποια πρέπει να είναι η παροχή της βρύσης , ώστε η δεξαμενή να είναι συνεχώς γεμάτη , χωρίς όμως να ξεχειλίζει ;
Δίνεται για την τρύπα $A_2 = 3,14 \cdot 10^{-6}\ m^2$ και $g = 10\ m / s^2$.

Λύση

Η υ_1 είναι το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κινείται το νερό στη δεξαμενή και η υ_2 είναι το μέτρο της ταχύτητας με την οποία βγαίνει το νερό από την τρύπα .

Από την εξίσωση της συνέχειας :

$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = (A_2 / A_1) \cdot \upsilon_2$ … (I) .

Ισχύει $A_1 >> A_2 \Rightarrow$

$(A_2 / A_1) << 1 \Rightarrow$

$(A_2 / A_1) \rightarrow 0$,

άρα από την σχέση (I) :

$\upsilon_1 \rightarrow 0$.

Εξίσωση του Bernoulli :

$P_1 + ½ \cdot \rho_{νερ} \cdot \upsilon_1^2 + \rho_{νερ} \cdot g \cdot h_1 = P_2 + ½ \cdot \rho_{νερ} \cdot \upsilon_2^2 + \rho_{νερ} \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow$

όπου $\upsilon_1 = 0$, $h_2 = 0$ και $h_1 = h$,

$P_1 + \rho_{νερ} \cdot g \cdot h = P_2 + ½ \cdot \rho_{νερ} \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$

ισχύει $P_1 = P_2$,

$\rho_{νερ} \cdot g \cdot h = ½ \cdot \rho_{νερ} \cdot \upsilon_2^2 \Rightarrow$

$2 \cdot g \cdot h = \upsilon_2^2 \Rightarrow$

$\upsilon_2 = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h)}$.

Η παροχή $Π_2$ της τρύπας :

$Π_2 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$

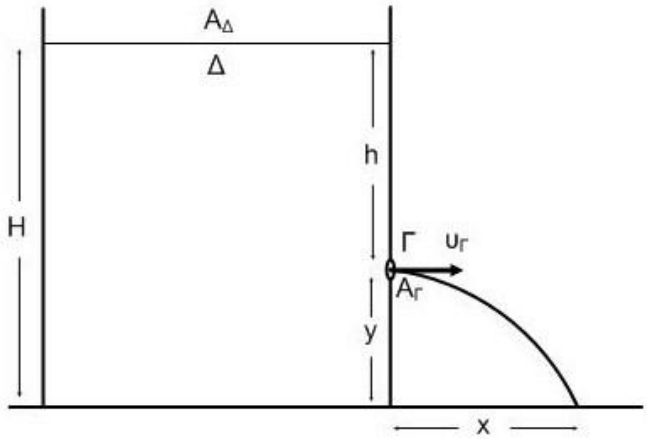
$Π_2 = A_2 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h)} \Rightarrow$

$Π_2 = 3,14 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{(2 \cdot 10 \cdot 5)} \Rightarrow$

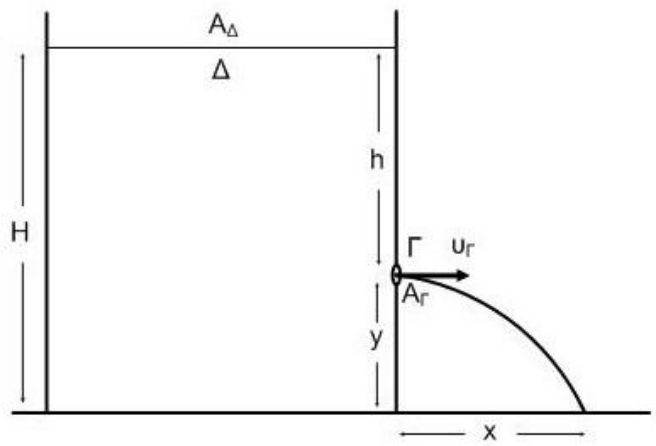
$Π_2 = 3,14 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \Rightarrow$

$Π_2 = 3,14 \cdot 10^{-5}\ m^3 / s$.

6) Η δεξαμενή νερού περιέχει νερό (πυκνότητας $\rho_{νερ}$) ύψους Η και έχει μια μικρή τρύπα σε βάθος h . Το νερό που βγαίνει από την τρύπα διαγράφει την παραβολή που φαίνεται στην εικόνα και συναντά το έδαφος σε απόσταση x .

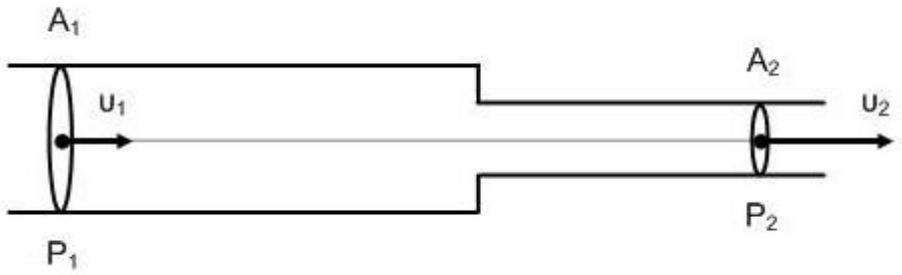


Αν θεωρήσουμε το ύψος Η σταθερό , να βρείτε το βάθος h .
Δίνεται H = 5 m και x = 3 m .
Λύση
Το νερό , βγαίνοντας από την μικρή τρύπα (σημείο Γ) θα εκτελέσει οριζόντια βολή .
(σύνθετη κίνηση)
Άξονας x :
$x = \upsilon_{\Gamma} \cdot t \Rightarrow$
$t = x / \upsilon_{\Gamma}$ … (I) .
Άξονας y :
$y = ½ \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$
με την βοήθεια της εξίσωσης (I) ,
επίσης $y = H – h$,
$H – h = ½ \cdot g \cdot (x / \upsilon_{\Gamma})^2 \Rightarrow$
$H – h = ½ \cdot g \cdot (x^2 / \upsilon_{\Gamma}^2) \Rightarrow$
$\upsilon_{\Gamma}^2 = g \cdot x^2 / [2 \cdot (H – h)] \Rightarrow$
$\upsilon_{\Gamma} = x \cdot \sqrt{\{g / [2 \cdot (H – h)]\}}$ … (II) .
Εξίσωση της συνέχειας για τις θέσεις Δ και Γ :
$A_{\Delta} \cdot \upsilon_{\Delta} = A_{\Gamma} \cdot \upsilon_{\Gamma} \Rightarrow$
$\upsilon_{\Delta} = \upsilon_{\Gamma} \cdot (A_{\Gamma} / A_{\Delta})$.
Ισχύει $A_{\Delta} >> A_{\Gamma} \Rightarrow$
$(A_{\Gamma} / A_{\Delta}) << 1$,
άρα ,
$\upsilon_{\Delta} = 0$.

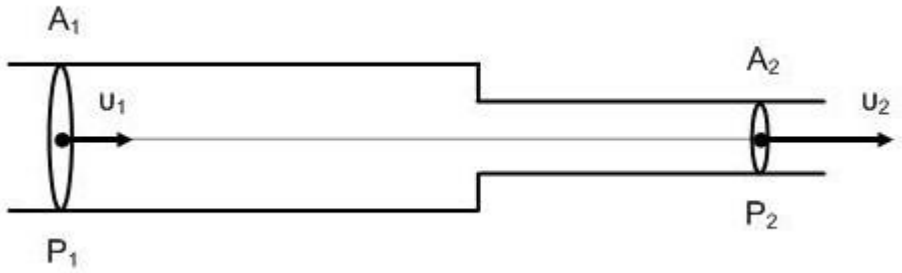


Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία Δ και Γ :
$P_{\Delta} + ½ \cdot \rho_{\nu\epsilon\rho} \cdot \upsilon_{\Delta}^2 + \rho_{\nu\epsilon\rho} \cdot g \cdot h = P_{\Gamma} + ½ \cdot \rho_{\nu\epsilon\rho} \cdot \upsilon_{\Gamma}^2 \Rightarrow$
ισχύει $P_{\Delta} = P_{\Gamma} = P_{at}$,
$P_{\Delta} + ½ \cdot \rho_{\nu\epsilon\rho} \cdot 0^2 + \rho_{\nu\epsilon\rho} \cdot g \cdot h = P_{\Delta} + ½ \cdot \rho_{\nu\epsilon\rho} \cdot \upsilon_{\Gamma}^2 \Rightarrow$
$\rho_{\nu\epsilon\rho} \cdot g \cdot h = ½ \cdot \rho_{\nu\epsilon\rho} \cdot \upsilon_{\Gamma}^2 \Rightarrow$
$2 \cdot g \cdot h = \upsilon_{\Gamma}^2 \Rightarrow$
από την σχέση (II) ,
$2 \cdot g \cdot h = x^2 \cdot \{g / [2 \cdot (H – h)]\} \Rightarrow$
$2 \cdot h = x^2 / [2 \cdot (H – h)] \Rightarrow$
$(H – h) \cdot h = x^2 / 4 \Rightarrow$
$H \cdot h – h^2 = x^2 / 4 \Rightarrow$
$5 \cdot h – h^2 = 3^2 / 4 \Rightarrow$
$5 \cdot h – h^2 = 2,25 \Rightarrow$
$h^2 – 5 \cdot h + 2,25 = 0$.
Με λύσεις για το ύψος h :
h = 4,5 m ή h = 0,5 m .
Δεν υπάρχει από την εκφώνηση της άσκησης περιορισμός που να μας αποτρέπει από το να δεχτούμε κάποια από τις δύο λύσεις . Άρα και οι δύο λύσεις είναι δεκτές .

7) Οριζόντιος σωλήνας διαρρέεται από νερό . Σε δύο περιοχές του σωλήνα οι διατομές είναι 0,20 m² και 0,050 m² αντίστοιχα .
Αν η ταχύτητα στην πρώτη διατομή είναι 5 m / s και η πίεση στη δεύτερη $2{,}0\cdot10^5$ N / m² , να βρείτε :
α. Την ταχύτητα του υγρού στη δεύτερη διατομή ,
β. Την πίεση στην πρώτη διατομή .
Η πυκνότητα του νερού είναι $1{,}0\cdot10^3$ kg / m³ .
Λύση
Δίνονται :
$A_1 = 0{,}2$ m² , $A_2 = 0{,}05$ m² άρα ,
$A_1 / A_2 = 4$.
α.

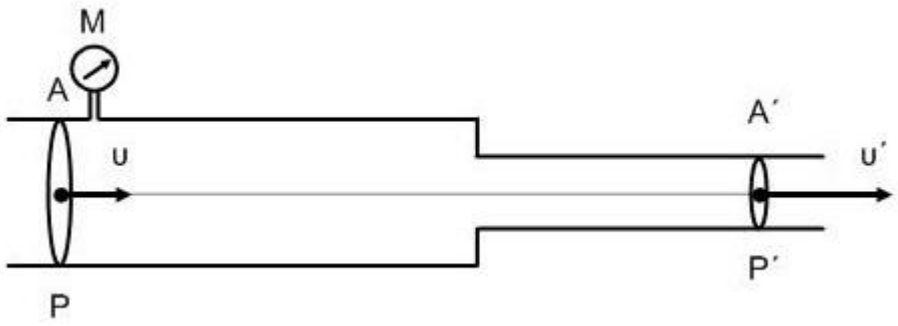


Η εξίσωση της συνέχειας :
$A_1\cdot\upsilon_1 = A_2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = (A_1 / A_2)\cdot\upsilon_1 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = 4\cdot\upsilon_1 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = 4\cdot5 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = 20$ m / s .
β.



Εξίσωση του Bernoulli :
$P_1 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow$
$P_1 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow$
ισχύει $\upsilon_2 = 4\cdot\upsilon_1$,
$P_1 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot[(4\cdot\upsilon_1)^2 - \upsilon_1^2] \Rightarrow$
$P_1 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot15\cdot\upsilon_1^2 \Rightarrow$
$P_1 = 2\cdot10^5 + ½\cdot1\cdot10^3\cdot15\cdot5^2 \Rightarrow$
$P_1 = 3{,}875\cdot10^5$ N / m² $\Rightarrow$
$P_1 \cong 3{,}9\cdot10^5$ N / m² .

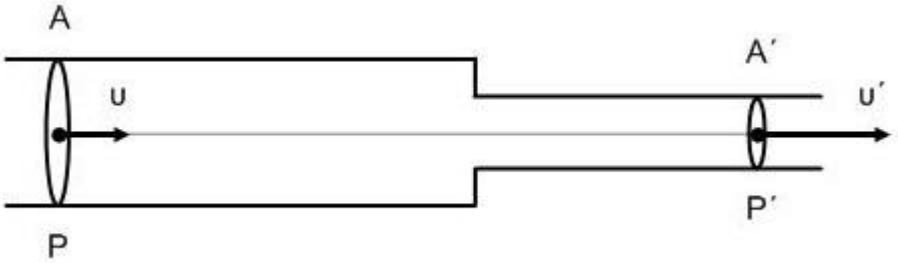
8)



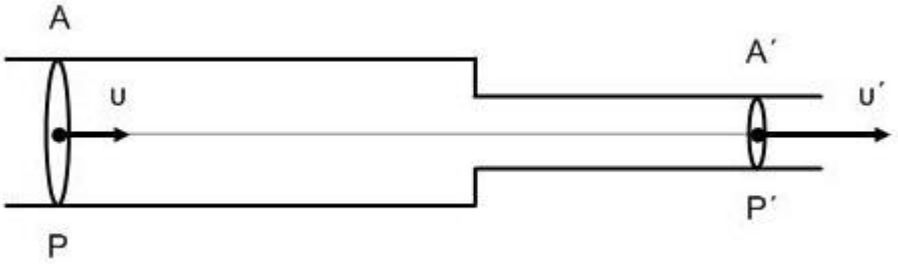
Η ένδειξη του μανομέτρου του σχήματος είναι $1,75 \cdot 10^5$ Pa . Αν οι διατομές των σωλήνων Α και Α΄ έχουν σχέση Α = 6·Α΄ , υπολογίστε τις ταχύτητες υ και υ΄ , ώστε η πίεση στη διατομή Α΄ να είναι μηδέν .
(Το φαινόμενο στην Α΄ είναι γνωστό ως σπηλαίωση και παρατηρείται εξάτμιση του νερού και δημιουργία φυσαλίδων σε εκείνη τη θέση , που αγνοούμε κατά την ανάλυση μας) .
Η πυκνότητα του νερού είναι 10^3 kg / m³ .

Λύση

Δίνονται : Α = 6·Α΄ , Ρ = $1,75 \cdot 10^5$ Pa , Ρ΄ = 0 και ρ = 10^3 kg / m³ .

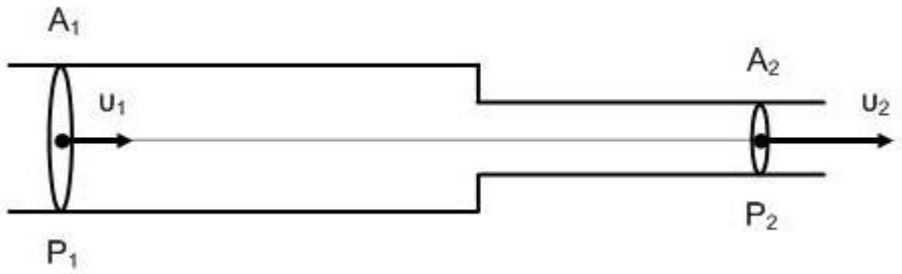


Η εξίσωση της συνέχειας :
Α·υ = Α΄·υ΄ ⇒
6·Α΄·υ = Α΄·υ΄ ⇒
υ΄ = 6·υ … (Ι) .
Η εξίσωση του Bernoulli :

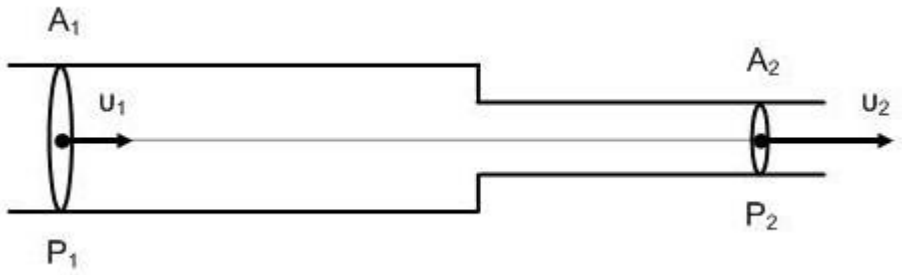


Ρ + ½·ρ·υ² = Ρ΄ + ½·ρ·υ΄² ⇒
δίνεται Ρ΄ = 0 , από την σχέση (Ι) ,
Ρ + ½·ρ·υ² = ½·ρ·(6·υ)² ⇒
Ρ = ½·ρ·36·υ² – ½·ρ·υ² ⇒
Ρ = (35 / 2)·ρ·υ² ⇒
υ² = 2·Ρ / (35·ρ) ⇒
υ = √[2·Ρ / (35·ρ)] ⇒
υ = √10 m / s ≅ 3,16 m / s .
Από την σχέση (Ι) :
υ΄ = 6·υ ⇒
υ΄ = 6·√10 m / s ⇒
υ΄ = 19 m / s .

9) Ένα βεντουρίμετρο έχει διάμετρο σωλήνα 30 cm και διάμετρο λαιμού 15 cm .
Αν οι πιέσεις στο σωλήνα και στη στένωση είναι αντίστοιχα $4,0\cdot10^4$ Pα και $3,0\cdot10^4$ Pα , να υπολογιστεί η παροχή του νερού στο σωλήνα .
Η πυκνότητα του νερού είναι $1,0\cdot10^3$ kg / m³ και π ≅ 3,14 .
Λύση
Δίνονται $P_1 = 4\cdot10^4$ N / m² , $P_2 = 3\cdot10^4$ N / m² και $\rho = \rho_\nu = 10^3$ kg / m³ .
Ακόμα $\Delta_1 = 30$ cm , $\Delta_2 = 15$ cm , άρα :
$\Delta_1 / \Delta_2 = 30\cdot10^{-2} / (15\cdot10^{-2}) \Rightarrow \Delta_1 / \Delta_2 = 2$.
Άρα $A_1 / A_2 = \Delta_1^2 / \Delta_2^2 \Rightarrow A_1 / A_2 = 4$.

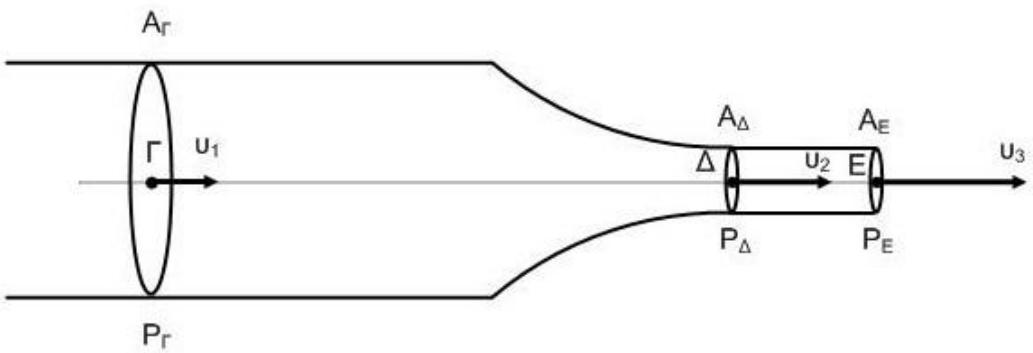


Εξίσωση συνέχειας :
$A_1\cdot\upsilon_1 = A_2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow A_1 / A_2 = \upsilon_2 / \upsilon_1 \Rightarrow$
$\upsilon_2 / \upsilon_1 = 4$ … (I) .
Εξίσωση Bernoulli :
$P_1 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2 = P_2 + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow$
$P_1 – P_2 = ½\cdot\rho\cdot(\upsilon_2^2 – \upsilon_1^2) \Rightarrow$
$P_1 – P_2 = ½\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2\cdot[(\upsilon_2^2 / \upsilon_1^2) – 1]$ … (II) .

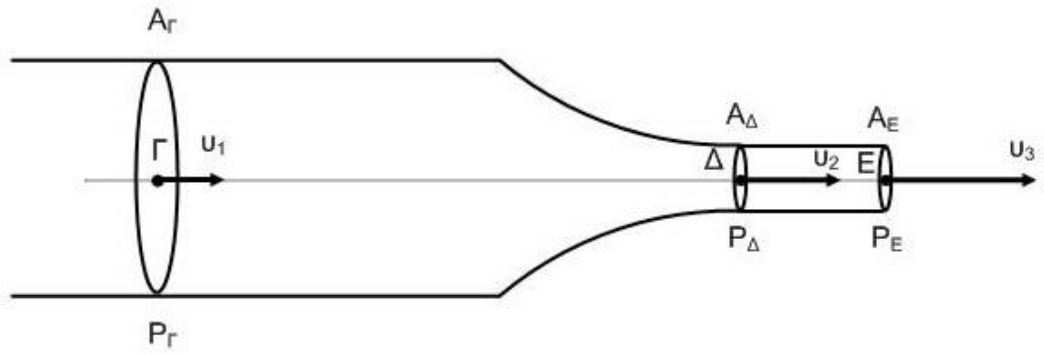


Η εξίσωση (II) με την βοήθεια της εξίσωσης (I) :
$P_1 – P_2 = ½\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2\cdot(4^2 – 1) \Rightarrow$
$P_1 – P_2 = ½\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2\cdot15 \Rightarrow$
$\upsilon_1 = \sqrt{[(P_1 – P_2) / (7,5\cdot\rho)]} \Rightarrow$
$\upsilon_1 = 2\cdot\sqrt{3} / 3$ m / s .
Άρα
$\Pi = A_1\cdot\upsilon_1 = (\pi\cdot\Delta_1^2 / 4)\cdot\upsilon_1 = (\pi\cdot9\cdot10^{-2} / 4)\cdot(2\cdot\sqrt{3} / 3)$ m³ / s ⇒
$\Pi = 1,5\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\cdot10^{-2}$ m³ / s ≅ 0,081 m³ / s .

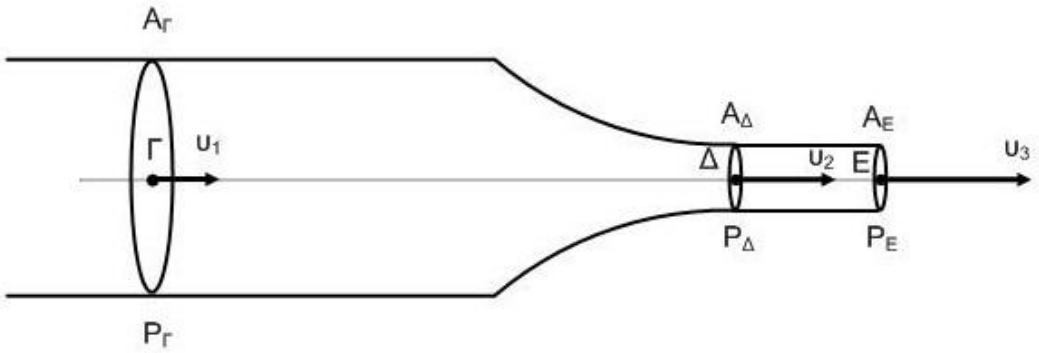
10) Ο πυροσβεστικός σωλήνας που φαίνεται στην εικόνα έχει διάμετρο 6,4 cm και καταλήγει σε ακροφύσιο διαμέτρου 2,5 cm .



Αν η υπερπίεση στο σωλήνα είναι $\Delta P = 3,5\cdot10^5$ N / m² και η ταχύτητα ροής $\upsilon_1 = 4$ m / s , να βρείτε :
α. Την ταχύτητα ροής υ_2 στο στο ακροφύσιο .
β. Την πίεση του νερού στο ακροφύσιο .
γ. Την ταχύτητα υ_3 , του νερού ακριβώς έξω από το ακροφύσιο .
Δίνεται $P_{at} = 1\cdot10^5$ N / m² και η πυκνότητα του νερού $\rho_{νερ} = 10^3$ kg / m³ .
Λύση
α.
Το εμβαδό $A_Γ$:
$A_Γ = \pi\cdot r_Γ^2 \Rightarrow$
$A_Γ = \pi\cdot(\delta_Γ / 2)^2 \Rightarrow$
$A_Γ = \pi\cdot\delta_Γ^2 / 4$.
Το εμβαδό $A_Δ$:
$A_Δ = \pi\cdot r_Δ^2 \Rightarrow$
$A_Δ = \pi\cdot(\delta_Δ / 2)^2 \Rightarrow$
$A_Δ = \pi\cdot\delta_Δ^2 / 4$.
Από την εξίσωση της συνέχειας :
$A_Γ\cdot\upsilon_1 = A_Δ\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$
$(\pi\cdot\delta_Γ^2 / 4)\cdot\upsilon_1 = (\pi\cdot\delta_Δ^2 / 4)\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$
$\delta_Γ^2\cdot\upsilon_1 = \delta_Δ^2\cdot\upsilon_2 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = (\delta_Γ^2 / \delta_Δ^2)\cdot\upsilon_1 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = (\delta_Γ / \delta_Δ)^2\cdot\upsilon_1 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = (6,4\cdot10^{-2} / 2,5\cdot10^{-2})^2\cdot4 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = 2,56^2\cdot4 \Rightarrow$
$\upsilon_2 = 26,21$ m / s .
β.
Ισχύει :
$\Delta P = P_Γ - P_{at} \Rightarrow$
$P_Γ = \Delta P + P_{at} \Rightarrow$
$P_Γ = 3,5\cdot10^5 + 1\cdot10^5 \Rightarrow$
$P_Γ = 4,5\cdot10^5$ N / m² .

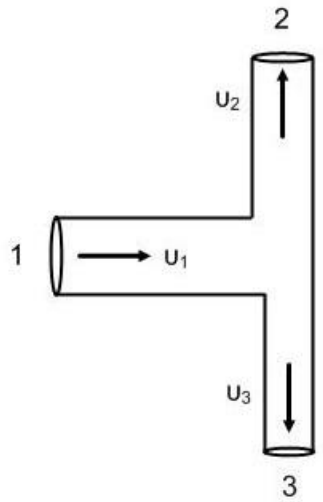


Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Γ και Δ :
(Τα σημεία Γ και Δ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία)
$P_Γ + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot\upsilon_1^2 + \rho_{νερ}\cdot g\cdot h_Γ = P_Δ + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot\upsilon_2^2 + \rho_{νερ}\cdot g\cdot h_Δ \Rightarrow$
Αφού τα σημεία Γ και Δ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ισχύει $h_Γ = h_Δ$,
$P_Γ + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot\upsilon_1^2 = P_Δ + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow$
$P_Δ = P_Γ + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot\upsilon_1^2 - ½\cdot\rho_{νερ}\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow$
$P_Δ = P_Γ + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) \Rightarrow$
$P_Δ = 4,5\cdot10^5 + ½\cdot10^3\cdot(4^2 - 26,21^2) \Rightarrow$
$P_Δ = 4,5\cdot10^5 + ½\cdot10^3\cdot(16 - 686,96) \Rightarrow$
$P_Δ = 4,5\cdot10^5 - 3,35\cdot10^5 \Rightarrow$
$P_Δ = 1,15\cdot10^5$ N / m² .
γ.

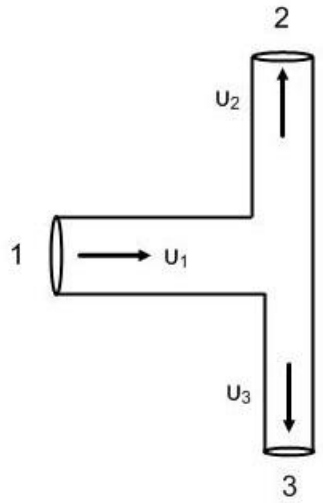


Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Δ και Ε :
(Τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία)
$P_\Delta + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot υ_2^2 + \rho_{νερ}\cdot g\cdot h_\Delta = P_E + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot υ_3^2 + \rho_{νερ}\cdot g\cdot h_E \Rightarrow$
Αφού τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ισχύει $h_\Delta = h_E$,
$P_\Delta + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot υ_2^2 = P_E + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot υ_3^2 \Rightarrow$
ισχύει $P_E = P_{at}$,
$P_\Delta + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot υ_2^2 = P_{at} + ½\cdot\rho_{νερ}\cdot υ_3^2 \Rightarrow$
$½\cdot\rho_{νερ}\cdot υ_3^2 = ½\cdot\rho_{νερ}\cdot υ_2^2 + (P_\Delta - P_{at}) \Rightarrow$
$υ_3^2 = υ_2^2 + [2\cdot(P_\Delta - P_{at}) / \rho_{νερ}] \Rightarrow$
$υ_3 = \sqrt{\{υ_2^2 + [2\cdot(P_\Delta - P_{at}) / \rho_{νερ}]\}} \Rightarrow$
$υ_3 = \sqrt{\{26,21^2 + [2\cdot(1,15\cdot10^5 - 1\cdot10^5) / 10^3]\}} \Rightarrow$
$υ_3 = \sqrt{\{686,96 + 30\}} \Rightarrow$
$υ_3 = \sqrt{716,96} \Rightarrow$
$υ_3 = 26,77$ m / s .

11) Ο αγωγός 1 με εμβαδό διατομής 10 cm² στο σχήμα μεταφέρει νερό με ταχύτητα 8 m / s και διακλαδίζεται με ένα οριζόντιο – τύπου Τ στον αγωγό 2 με εμβαδό διατομής 6 cm² και τον αγωγό 3 με εμβαδό διατομής 4 cm² .



Η πίεση του νερού στην έξοδο του αγωγού 3 είναι 100 kPα και ταχύτητα 9 m / s .
Να υπολογιστούν :
α. Η πίεση του νερού στην είσοδο του αγωγού 1 ,
β. Η ταχύτητα του νερού στην έξοδο του αγωγού 2 ,
γ. Η πίεση του νερού στην έξοδο του αγωγού 2 .
Υποθέτουμε ότι η ροή είναι στρωτή , δηλαδή δεν παρουσιάζει στροβίλους στο ιδανικό ρευστό (νερό) που κινείται μέσα στο σωλήνα (κάτι που δεν ισχύει βέβαια στη πραγματικότητα) .
Λύση
α.

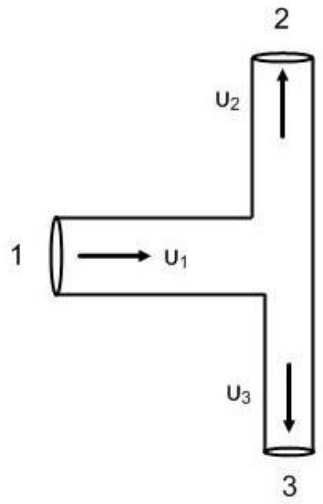


Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τους αγωγούς 1 και 3 :
$P_1 + ½·ρ·υ_1^2 + ρ·g·y_1 = P_3 + ½·ρ·υ_3^2 + ρ·g·y_3 ⇒$
$y_1 = y_3 = 0$,
$P_1 + ½·ρ·υ_1^2 = P_3 + ½·ρ·υ_3^2 ⇒$
$P_1 = P_3 + ½·ρ·(υ_3^2 – υ_1^2) ⇒$
$P_1 = 10^5 + ½·10^3·(9^2 – 8^2) ⇒$
$P_1 = 10^5 + ½·10^3·17 ⇒$
$P_1 = 100·10^3 + 8,5·10^3 ⇒$
$P_1 = 108,5$ kPα .

β.

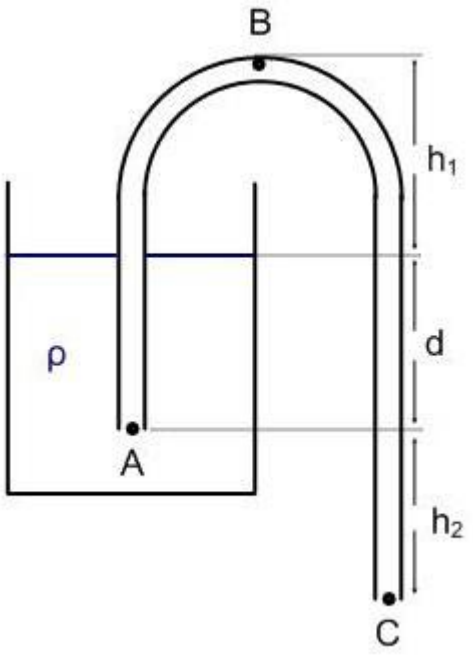
Το νερό είναι ασυμπίεστο , άρα σε χρόνο Δt :
$dV_1 = dV_2 + dV_3 ⇒$
$dV_1 / dt = (dV_2 / dt) + (dV_3 / dt) ⇒$
$A_1·υ_1 = A_2·υ_2 + A_3·υ_3 ⇒$
$A_2·υ_2 = A_1·υ_1 – A_3·υ_3 ⇒$
$υ_2 = (A_1·υ_1 – A_3·υ_3) / A_2 ⇒$
οι μετατροπές των μονάδων δεν είναι απαραίτητες γιατί απλοποιούνται ,
$υ_2 = (10·8 – 4·9) / 6 ⇒$
$υ_2 = 7,33$ m / s .

γ.



Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τους αγωγούς 1 και 2 :
$P_1 + ½·ρ·υ_1^2 + ρ·g·y_1 = P_2 + ½·ρ·υ_2^2 + ρ·g·y_2 ⇒$
$y_1 = y_2 = 0$,
$P_1 + ½·ρ·υ_1^2 = P_2 + ½·ρ·υ_2^2 ⇒$
$P_2 = P_1 + ½·ρ·(υ_1^2 – υ_2^2) ⇒$
$P_2 = 108,5·10^3 + ½·10^3·(64 – 53,7) ⇒$
$P_2 = 108,5·10^3 + 5,2·10^3 ⇒$
$P_2 = 113,7$ kPα .

12) Το σχήμα δείχνει ένα σωλήνα αναρρόφησης , μια απλή συσκευή για να τραβήξουμε υγρό από ένα δοχείο . Ο σωλήνας ABC πρέπει να είναι αρχικά γεμάτος , αλλά όταν επιτευχθεί αυτό , υγρό θα ρέει από αυτόν έως ότου η επιφάνεια του υγρού στο δοχείο ισοσταθμιστεί με το άνοιγμα A του σωλήνα .



Το υγρό έχει πυκνότητα 10^3 kg / m³ και αμελητέο ιξώδες . Οι αποστάσεις που φαίνονται στο σχήμα είναι h_1 = 25 cm , d = 10 cm και h_2 = 40 cm .

α. Με πόση ταχύτητα εξέρχεται το υγρό από το σωλήνα στο C ,

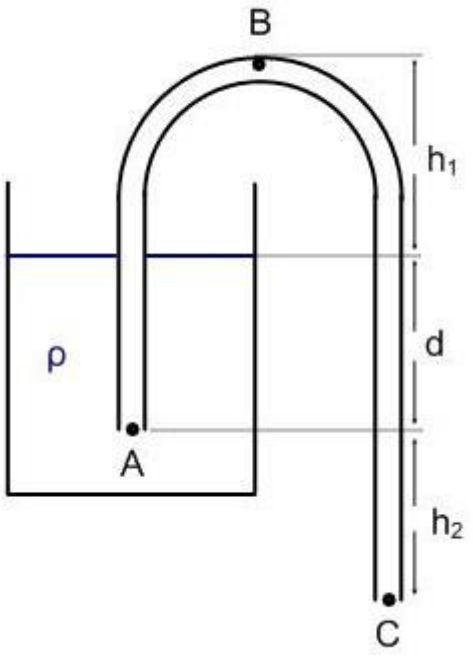
β. Αν η ατμοσφαιρική πίεση είναι 10^5 Pa , πόση είναι η πίεση στο υγρό στο πιο ψηλό σημείο B της διαδρομής ;

γ. Θεωρητικά πόσο είναι το μέγιστο δυνατό ύψος h_1 στο οποίο ένας σωλήνας αναρρόφησης μπορεί να ανυψώσει το νερό ;

Δίνεται g = 10 m / s² .

Λύση

α.



Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία A και C :

$P_A + ½·ρ·υ_A^2 + ρ·g·h_2 = P_C + ½·ρ·υ_C^2 + 0 \Rightarrow$

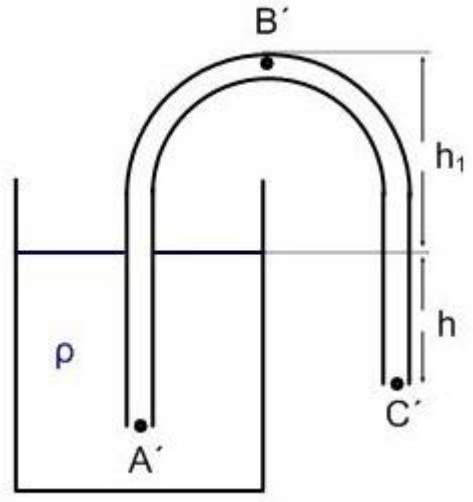
όμως $υ_A = 0$ (αρχική ταχύτητα) , επίσης $P_A = P_{at} + ρ·g·d$ και $P_C = P_{at}$,

$P_{at} + ρ·g·d + ρ·g·h_2 = P_{at} + ½·ρ·υ_C^2 \Rightarrow$

$½·ρ·υ_C^2 = ρ·g·(d + h_2) \Rightarrow$

$υ_C = \sqrt{[2·g·(d + h_2)]} \Rightarrow$

$\upsilon_C = \sqrt{[2\cdot10\cdot(0,1 + 0,4)]} \Rightarrow$
$\upsilon_C = \sqrt{10}$ m / s .
β.
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία B και C :
$P_B + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_B^2 + \rho\cdot g\cdot(h_1 + d + h_2) = P_C + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_C^2 + 0$ … (1) .
Επειδή η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή $A_B = A_C$ από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε :
$A_B\cdot\upsilon_B = A_C\cdot\upsilon_C \Rightarrow$
$\upsilon_B = \upsilon_C$.
Ισχύει $P_C = P_{at}$.
Άρα η σχέση (1) :
$P_B + \rho\cdot g\cdot(h_1 + d + h_2) = P_{at} \Rightarrow$
$P_B = P_{at} - \rho\cdot g\cdot(h_1 + d + h_2) \Rightarrow$
$P_B = 10^5 - 10^3\cdot10\cdot0,75 \Rightarrow$
$P_B = (1 - 0,075)\cdot10^5$ Pa $\Rightarrow$
$P_B = 0,925\cdot10^5$ Pa .
Η P_B είναι 7,5 % μικρότερη της P_{at} .
γ.
Αντιμετωπίζουμε το ερώτημα θεωρητικά και γενικά .



Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία B΄ και C΄ (άκρο εξόδου του νερού) :
$P_B' + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_B'^2 + \rho\cdot g\cdot(h_1' + h) = P_C' + ½\cdot\rho\cdot\upsilon_C'^2 + 0$ … (2) .
$P_C' = P_{at}$ και $\upsilon_B' = \upsilon_C'$ γιατί ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή και από την εξίσωση της συνέχειας :
$A_B'\cdot\upsilon_B' = A_C'\cdot\upsilon_C' \Rightarrow$
$A_B' = A_C'$,
$\upsilon_B' = \upsilon_C'$.
Από την σχέση (2) με την αντικατάσταση των σχέσεων :
$P_B' + \rho\cdot g\cdot(h_1' + h) = P_{at} \Rightarrow$
$\rho\cdot g\cdot h_1' = P_{at} - P_B' - \rho\cdot g\cdot h \Rightarrow$
$h_1' = [P_{at} - P_B' - \rho\cdot g\cdot h] / (\rho\cdot g)$.
Το h_1' γίνεται μέγιστο όταν το P_B' τείνει στο μηδέν όπως και το h . Δηλαδή το άκρο εξόδου του νερού C΄ πρέπει να βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο δοχείο .
$h_{1,max}' = P_{at} / (\rho\cdot g) \Rightarrow$
$h_{1,max}' = 10^5 / (10^3\cdot10) \Rightarrow$
$h_{1,max}' = 10$ m .

13)Η οπή εκτόξευσης του νερού ενός νεροπίστολου είναι 1,0 mm² και το εμβαδόν του εμβόλου που πιέζει το νερό 75 mm² .
Η εταιρεία κατασκευής απαιτεί γι' αυτό το νερό που εκτοξεύεται , όταν ένα παιδί χειρίζεται το παιχνίδι , και εκτοξεύεται οριζόντια κατά 3,5 m , ενώ η κατακόρυφη απόκλιση του να είναι μικρότερη από 1,0 m .
Αν ένα παιδί μπορεί να ασκήσει δύναμη περίπου 10 N , έχει τις προδιαγραφές της εταιρείας το νεροπίστολο ;
Η πυκνότητα του νερού είναι $1,0\cdot10^3$ kg·m³ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 9,8 m / s² .

Λύση

<u>1ος τρόπος λύσης</u>

Προδιαγραφές : x_{max} = 3,5 m με y = 1 m .

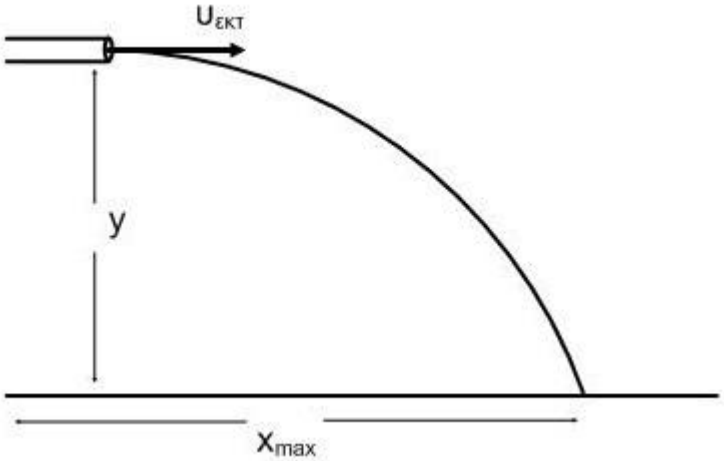
Γενικά :

$y = ½·g·t^2$,

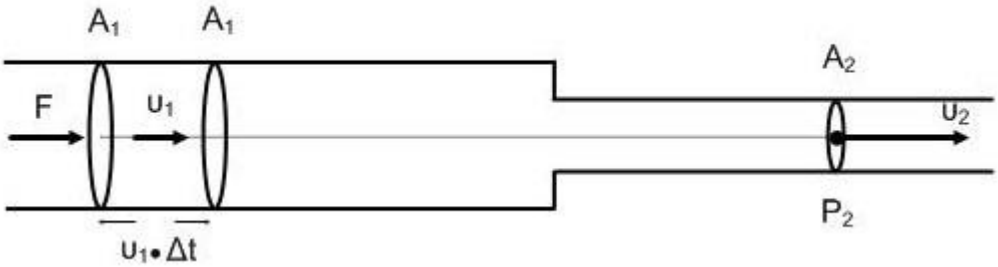
$x = υ·t \Rightarrow t = x / υ$, άρα :

$y = [g /(2·υ^2)]·x^2 \Rightarrow$

$υ^2 = [g / (2·y)]·x^2$, επομένως :



$υ_{εκ} = x_{max}·√[g / (2·y)] \cong 7,75$ m / s .



Θεωρούμε ότι το έμβολο υπό την επίδραση της F μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα $υ_1$ για Δt . Επομένως η F παράγει έργο :

$W_F = F·υ_1·Δt$ … (I) .

Τότε η μάζα του ρευστού $Δm = ρ·A_1·υ_1·Δt$ … (II) , μεταβάλλει την κινητική της ενέργεια κατά :

$ΔK = ½·Δm·(υ_2^2 – υ_1^2)$,

από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ,

$ΔK = W_F$, άρα ,

$½·Δm·(υ_2^2 – υ_1^2) = W_F \Rightarrow$

από τις σχέσεις (I) και (II) ,

$½·ρ·A_1·υ_1·Δt·(υ_2^2 – υ_1^2) = F·υ_1·Δt \Rightarrow$

$ρ·A_1·(υ_2^2 – υ_1^2) = 2·F \Rightarrow$

$ρ·A_1·υ_2^2·[1 – (υ_1 / υ_2)^2] = 2·F$.

εξίσωση συνέχειας : $A_1·υ_1 = A_2·υ_2 \Rightarrow υ_1 / υ_2 = A_2 / A_1$.

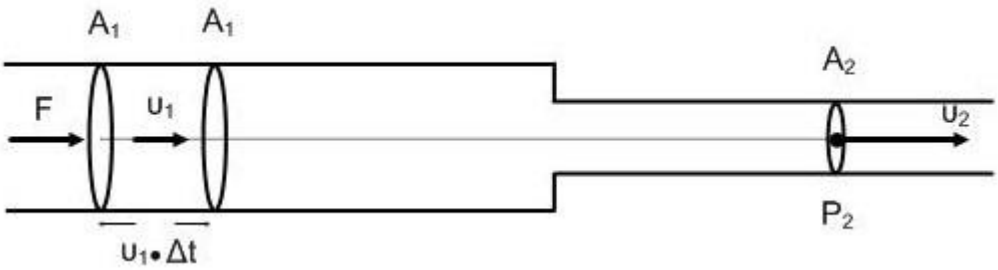
Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις :

$ρ·A_1·υ_2^2·[1 – (A_2 / A_1)^2] = 2·F \Rightarrow$

$υ_2 = √\{2·F / [ρ·A_1·(1 – (A_2 / A_1)^2)]\} \Rightarrow$

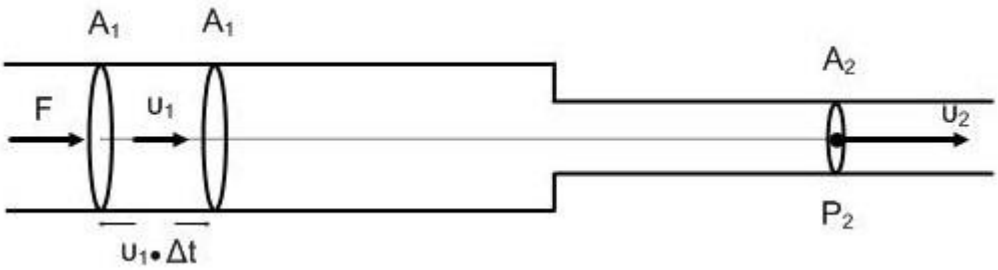
$υ_2 \cong 16,33$ m / s > $υ_{εκτ}$ άρα ικανοποιούνται οι προδιαγραφές .

<u>2ος τρόπος λύσης</u>



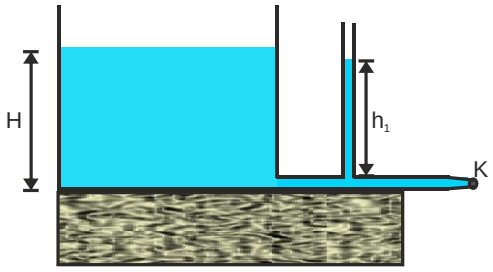
Θα μπορούσαμε να δεχτούμε ότι υπό την επίδραση της F το έμβολο με διατομή A_1 έχει αποκτήσει ταχύτητα $υ_1$ άρα και το ρευστό . Τότε στην διατομή A_2 το ρευστό θα έχει ταχύτητα $υ_2$. Επομένως , από την εξίσωση συνέχειας :
$A_1 \cdot υ_1 = A_2 \cdot υ_2 \Rightarrow υ_1 / υ_2 = A_2 / A_1$.
Το έργο της σταθερής δύναμης F θα είναι $W = F \cdot Δx$ το οποίο μεταβάλλει την κινητική ενέργεια της μάζας $Δm = ρ \cdot A_1 \cdot Δx$ κατά $ΔK = ½ \cdot Δm \cdot (υ_2^2 - υ_1^2)$,
άρα $F \cdot Δx = ½ \cdot ρ \cdot A_1 \cdot Δx \cdot (υ_2^2 - υ_1^2) \Rightarrow$
$υ_2^2 - υ_1^2 = 2 \cdot F / (ρ \cdot A_1) \Rightarrow$
$υ_2^2 \cdot [1 - (υ_1 / υ_2)^2] = 2 \cdot F / (ρ \cdot A_1) \Rightarrow$
$υ_2 = √\{2 \cdot F / [ρ \cdot A_1 \cdot (1 - (A_2 / A_1)^2)]\}$, καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα .

<u>3ος τρόπος λύσης</u>



Εξίσωση του Bernoulli :
$P_1 + ½ \cdot ρ \cdot υ_1^2 = P_2 + ½ \cdot ρ \cdot υ_2^2 \Rightarrow$
$P_{at} + (F / A_1) + ½ \cdot ρ \cdot υ_1^2 = P_{at} + ½ \cdot ρ \cdot υ_2^2 \Rightarrow$
$F / A_1 = (l / 2) \cdot (υ_2^2 - υ_1^2) \Rightarrow$
$2 \cdot F / (ρ \cdot A_1) = υ_2^2 \cdot [1 - (υ_1 / υ_2)^2] \Rightarrow$
εξίσωση της συνέχειας : $A_1 \cdot υ_1 = A_2 \cdot υ_2 \Rightarrow υ_1 / υ_2 = A_2 / A_1$,
$υ_2 = √\{2 \cdot F / [ρ \cdot A_1 \cdot (1 - (A_2 / A_1)^2)]\}$, καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα .

14) Το δοχείο του σχήματος έχει πολύ μεγάλο εμβαδό διατομής και περιέχει νερό, το οποίο θεωρούμε ιδανικό ρευστό, σε ύψος H=5m. Στη βάση του δοχείου έχει προσαρμοστεί λεπτός οριζόντιος σωλήνας διατομής A_1, του οποίου το άκρο καταλήγει σε στένωση διατομής A_2, με $A_1=2A_2$. Το άκρο K του σωλήνα είναι κλειστό με τάπα, ενώ σε κάποιο σημείο του είναι προσαρμοσμένο κατακόρυφο ανοικτό σωληνάκι, στο οποίο το νερό ισορροπεί σε ύψος h_1. Ανοίγουμε την τάπα οπότε αποκαθίσταται στρωτή και μόνιμη ροή, ενώ τροφοδοτώντας το δοχείο με νερό, διατηρούμε τη στάθμη του σταθερή στο ύψος H. Παρατηρούμε ότι το νερό στο σωληνάκι ισορροπεί σε ύψος h_2. Δίνεται $P_{ATM}=10^5$Pa, η πυκνότητα του νερού $ρ=10^3$kg/m^3 και g=10m/s^2.



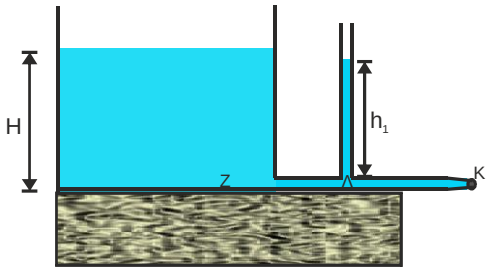
Ο λόγος $\frac{h_2}{h_1}$ είναι ίσος με:

α. $\frac{3}{4}$ β. $\frac{4}{3}$ γ. 0

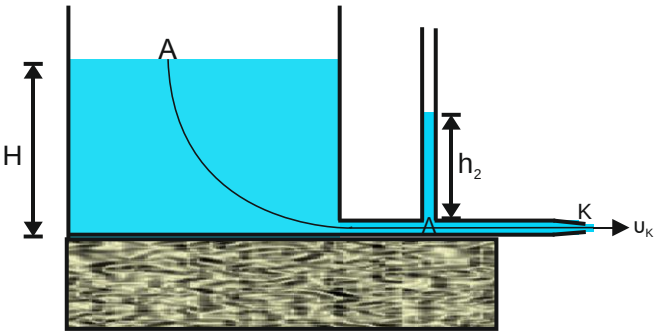
Απάντηση

Με το άκρο K κλειστό, το νερό βρίσκεται σε ισορροπία. Επομένως:

$$P_Z = P_Λ \rightarrow P_{ATM} + ρgH = P_{ATM} + ρgh_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow h_1 = H \rightarrow h_1 = 5m$$



Ανοίγοντας την τάπα, αρχίζει η εκροή το νερού από το άκρο Κ του σωλήνα.



Εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli μεταξύ του σημείου Α της ελεύθερης επιφάνειας του δοχείου και του σημείου Κ, θα έχουμε (με επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα του δοχείου):

$$P_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + \rho gH = P_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 \quad (1)$$

Όμως $P_A = P_K = P_{ATM}$ και λόγω εξίσωσης συνέχειας μεταξύ των Α και Κ, η υ_A είναι αμελητέα ως προς τη υ_K, αφού το δοχείο έχει πολύ μεγάλη επιφάνεια. Έτσι από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\rho gH = \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 \rightarrow \upsilon_K = \sqrt{2gH} \rightarrow \upsilon_K = 10m/s$$

Εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli μεταξύ του σημείου Λ κάτω από το σωληνάκι και του σημείου Κ, θα έχουμε:

$$P_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 = P_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 \quad (2)$$

Όμως από εξίσωση συνέχειας μεταξύ των Λ και Κ έχουμε:

$$A_1\upsilon_\Lambda = A_2\upsilon_K \rightarrow 2A_2\upsilon_\Lambda = A_2\upsilon_K \rightarrow \upsilon_\Lambda = 5m/s$$

Έτσι αντικαθιστώντας στη σχέση (2) παίρνουμε $P_\Lambda = 1{,}375 \cdot 10^5 Pa$

Όμως το υγρό στο κατακόρυφο σωληνάκι ισορροπεί, επομένως:

$$P_\Lambda = P_{ATM} + \rho gh_2 \rightarrow h_2 = 3{,}75m$$

Άρα ο ζητούμενος λόγος θα είναι:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{3,75}{5} \rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{3}{4}$$ (σωστή η πρόταση α)

Σχόλια:

Α. Στην έκφραση της πίεσης στο Λ δεν λάβαμε υπόψιν μας την απόσταση του Λ από τη βάση του κατακόρυφου σωληνακίου. Τούτο δε, διότι θεωρήσαμε τον οριζόντιο σωλήνα λεπτό.

Β. Αν το οριζόντιο σωληνάκι δεν εμφάνιζε στένωση, τότε θα ήταν

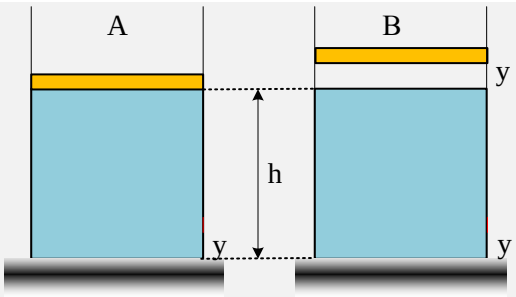
$$A_1\upsilon_\Lambda = A_1\upsilon_K \rightarrow \upsilon_\Lambda = \upsilon_K \rightarrow \upsilon_\Lambda = 10m/s$$

Αλλά τότε από τη σχέση (2) θα προέκυπτε

$$P_\Lambda = P_K = P_{ATM}$$

και το ύψος h_2 του νερού στο κατακόρυφο σωληνάκι θα ήταν ίσο με μηδέν. 'Ετσι ο ζητούμενος λόγος θα ήταν $\frac{h_2}{h_1} = 0$.

15) Έστω δύο μεγάλα δοχεία Α και Β τα οποία περιέχουν νερό μέχρι ύψος h. Το πρώτο δοχείο κλείνεται με βαρύ έμβολο σε επαφή με την πάνω επιφάνεια του νερού, ενώ στο δεύτερο με ένα όμοιο έμβολο, αλλά σε αυτό έχει εγκλωβιστεί μια ποσότητα αέρα μεταξύ νερού και εμβόλου, ύψους y, όπως στο σχήμα. Σε ύψος y, από τους πυθμένες των δοχείων, υπάρχουν δυο τάπες ίδιου εμβαδού.



i) Μεγαλύτερη δύναμη από το νερό ασκείται στην τάπα:

α) του Α δοχείου,

β) του Β δοχείου,

γ) Στις δύο τάπες ασκούνται ίσες δυνάμεις.

ii) Σε μια στιγμή ανοίγουμε τις τάπες, οπότε μετά από λίγο έχουμε δύο μόνιμες ροές με ταχύτητες εκροής υ_1 και υ_2 για τα δοχεία Α και Β αντίστοιχα. Για τις ταχύτητες αυτές ισχύει:

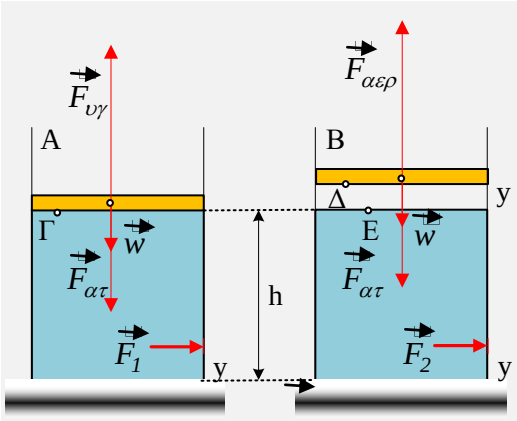
α) $\upsilon_1 < \upsilon_2$, β) $\upsilon_1 = \upsilon_2$, γ) $\upsilon_1 > \upsilon_2$.

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

Δίνεται ότι το εμβαδόν των δύο εμβόλων, είναι πολύ μεγαλύτερο από το εμβαδόν των δύο οπών από τις οποίες χύνεται το νερό, το οποίο θεωρούμε ιδανικό ρευστό. Δίνεται επίσης ότι ο εγκλωβισμένος αέρας βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας στη διάρκεια του πειράματος.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε έμβολο, όπου $F_{\alpha\tau}$ η δύναμη από την ατμόσφαιρα, $F_{\upsilon\gamma}$ η δύναμη που ασκεί το νερό στο πρώτο έμβολο και $F_{\alpha\varepsilon\rho}$ η αντίστοιχη δύναμη στο δεύτερο έμβολο από τον εγκλωβισμένο αέρα. Από τις ισορροπίες των δύο εμβόλων παίρνουμε:



$$\Sigma F_1=0 \rightarrow F_{\upsilon\gamma}=F_{\alpha\tau}+w \rightarrow$$

$$\frac{F_{\upsilon\gamma}}{A}=\frac{F_{\alpha\tau}}{A}+\frac{w}{A}\rightarrow p_\Gamma=p_{at}+\frac{w}{A} \quad (1)$$

Όπου p_Γ η πίεση στο σημείο Γ, στην κάτω πλευρά του πρώτου εμβόλου.

$$\Sigma F_2=0 \rightarrow F_{\alpha\varepsilon\rho}=F_{\alpha\tau}+w \rightarrow$$

$$\frac{F_{\alpha\varepsilon\rho}}{A}=\frac{F_{\alpha\tau}}{A}+\frac{w}{A}\rightarrow p_\Delta=p_{at}+\frac{w}{A} \quad (2)$$

Όπου p_Δ η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα, αλλά και η πίεση σε όλα τα σημεία του όγκου που καταλαμβάνει ο αέρας, άρα και στην επιφάνεια του νερού στο δοχείο Β ($p_\Delta=p_E$).

Έστω $p_{\tau 1}$ η πίεση στην αριστερή πλευρά της τάπας στο δοχείο Α. Ισχύει:

$$p_{\tau 1}-p_\Gamma=\rho g\cdot\Delta h \rightarrow p_{\tau 1}=p_\Gamma+\rho g\,(h-y) \rightarrow$$

$$F_1=p_{\tau 1}\cdot A=\left(p_\Gamma+\rho g(h-y)\right)\cdot A \quad (3)$$

Αντίστοιχα για την πίεση στην αριστερή πλευρά της τάπας στο Β δοχείο, έχουμε:

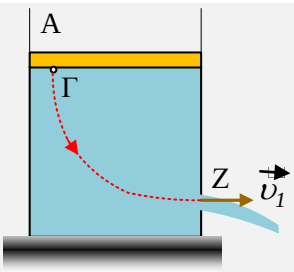
$$p_{\tau 2}-p_E=\rho g\cdot\Delta h \rightarrow p_{\tau 2}=p_E+\rho g\,(h-y) \rightarrow$$

$$F_2=p_{\tau 2}\cdot A=\left(p_\Delta+\rho g(h-y)\right)\cdot A \quad (4)$$

Αλλά από τις (3) και (4) αφού $p_\Gamma=p_\Delta$ προκύπτει ότι $F_1=F_2$.

Σωστό το γ).

ii) Για το Α δοχείο, εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Γ, στο κάτω μέρος του εμβόλου και το σημείο Ζ στην έξοδο, όπου το νερό έχει ταχύτητα υ_1:



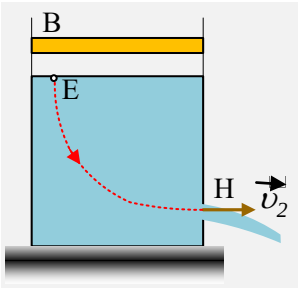
$$p_\Gamma+\rho g(h-y)+\frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2=p_{\alpha\tau}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$

Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών στο Γ και Ζ, παίρνουμε:

$$\upsilon_\Gamma\cdot A_\Gamma=\upsilon_1 A_Z \rightarrow \upsilon_\Gamma=\frac{A_Z}{A_\Gamma}\upsilon_1\rightarrow 0 \text{ οπότε:}$$

$$p_{at}+\frac{w}{A}+\rho g(h-y)=p_{\alpha\tau}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h-y)+\frac{2w}{\rho A}} \quad (5)$$



Αντίστοιχα για το Β δοχείο, με την ίδια λογική, έχουμε:

$$p_E + \rho g(h-y) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

Και θεωρώντας $\upsilon_E \to 0$ παίρνουμε:

$$p_{at} + \frac{w}{A} + \rho g(h-y) = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \to$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h-y)+\frac{2w}{\rho A}} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) παίρνουμε ότι $\upsilon_1=\upsilon_2$. Σωστό το β).