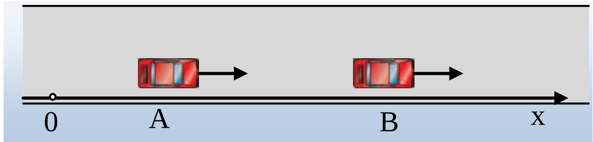
1)Σε ευθύγραμμο δρόμο κινείται ένα αυτοκίνητο με σταθερή ταχύτητα και την χρονική στιγμή t_1=4s περνά από την θέση Α με x_1=20m, ενώ τη στιγμή t_2=10s φτάνει στη θέση Β με x_2=80m.



i) Ποια η χρονική διάρκεια της κίνησης από το Α στο Β και ποια η αντίστοιχη μετατόπιση του αυτοκινήτου;

ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του αυτοκινήτου.

iii) Να βρεθεί η μετατόπιση του αυτοκινήτου από την στιγμή t_3= 5s, μέχρι τη στιγμή t_4= 9s. Ποια η θέση του αυτοκινήτου την στιγμή t_4;

iv) Ποια χρονική στιγμή το αυτοκίνητο περνά από την θέση x_5=56m;

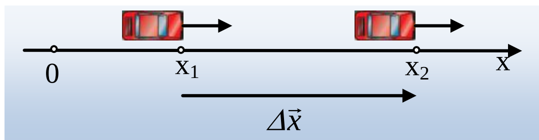
Απάντηση:

Από τον ορισμό της ταχύτητας έχουμε (αλγεβρική εξίσωση):

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1)$$

Παρακάτω θα δουλέψουμε αποκλειστικά με την παραπάνω εξίσωση, προσπαθώντας να απαντήσουμε στα ερωτήματα που τίθενται.

i) Η χρονική διάρκεια της κίνησης (ο χρόνος κίνησης) από το Α στο Β, είναι ίση:



$$\Delta t = t_2 - t_1 = 10s - 4s = 6s$$

Ενώ η αντίστοιχη μετατόπιση, είναι ίση:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 80m - 20m = 60m$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι στην πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε στην μεταβολή του χρόνου t και στην δεύτερη για την μεταβολή της θέσης x.

ii) Με αντικατάσταση στην εξίσωση (1) θα πάρουμε:

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{60m}{6s} = 10m/s$$

iii) Για την μετατόπιση από τη στιγμή t_3 έως τη στιγμή t_4 θα έχουμε από την (1):

$$\upsilon = \frac{\Delta x_{34}}{\Delta t_{34}} \rightarrow \Delta x_{34} = \upsilon \cdot \Delta t_{34} \rightarrow \Delta x_{34} = \upsilon \cdot (t_4 - t_3) \rightarrow$$
$$\Delta x_{34} = 10 \cdot (9-5)m = 40m$$

Στο παραπάνω διάστημα βρήκαμε την μετατόπιση, αλλά δεν γνωρίζουμε σε ποια θέση ήταν το αυτοκίνητο, τη στιγμή t_3, για να προσδιορίσουμε την θέση του τη στιγμή t_4. Ας την βρούμε:

$$\upsilon = \frac{\Delta x_{13}}{\Delta t_{13}} \rightarrow \Delta x_{13} = \upsilon \cdot \Delta t_{13} \rightarrow \Delta x_{13} = \upsilon \cdot (t_3 - t_1) \rightarrow$$
$$\Delta x_{13} = 10 \cdot (5-4)m = 10m \rightarrow$$
$$x_3 - x_1 = 10m \rightarrow x_3 = x_1 + 10m = 20m + 10m = 30m$$

Οπότε, αφού βρήκαμε την θέση x_3, θα έχουμε:

$$\Delta x_{34} = x_4 - x_3 \rightarrow x_4 = x_3 + \Delta x_{34} = 30m + 40m = 70m$$

Σημείωση: Θα μπορούσε κάποιος να βρει την θέση x_4 χωρίς να χρησιμοποιήσει την x_3, αλλά δουλεύοντας στο χρονικό διάστημα t_4-t_1:

$$\upsilon = \frac{\Delta x_{14}}{\Delta t_{14}} \rightarrow \Delta x_{14} = \upsilon \cdot \Delta t_{14} \rightarrow \Delta x_{14} = \upsilon \cdot (t_4 - t_1) \rightarrow$$
$$\Delta x_{14} = 10 \cdot (9-4)m = 50m \rightarrow$$
$$x_4 - x_1 = 50m \rightarrow x_4 = x_1 + 50m = 20m + 50m = 70m$$

iv) Με αντικατάσταση στην σχέση (1) για το χρονικό διάστημα t_1 έως t_5 παίρνουμε:

$$\upsilon = \frac{\Delta x_{15}}{\Delta t_{15}} \rightarrow \upsilon = \frac{x_5 - x_1}{t_5 - t_1} \xrightarrow{\text{αντικατάσταση}}$$
$$10 = \frac{56-20}{t_5 - 4} \rightarrow t_5 - 4 = \frac{36}{10} \rightarrow$$
$$t_5 = 4s + 3{,}6s = 7{,}6s$$

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να αξιοποιήσουμε την εξίσωση (1) με λίγο διαφορετικό τρόπο, αν την γράφαμε με την μορφή:

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \upsilon = \frac{x - x_1}{t - t_1} \rightarrow$$
$$x = x_1 + \upsilon(t - t_1)$$

Όπου η τελευταία εξίσωση μας δίνει την τυχαία θέση x σαν συνάρτηση της χρονικής στιγμής t! Πράγματι με αντικατάσταση των τιμών x_1 και t_1 στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε:

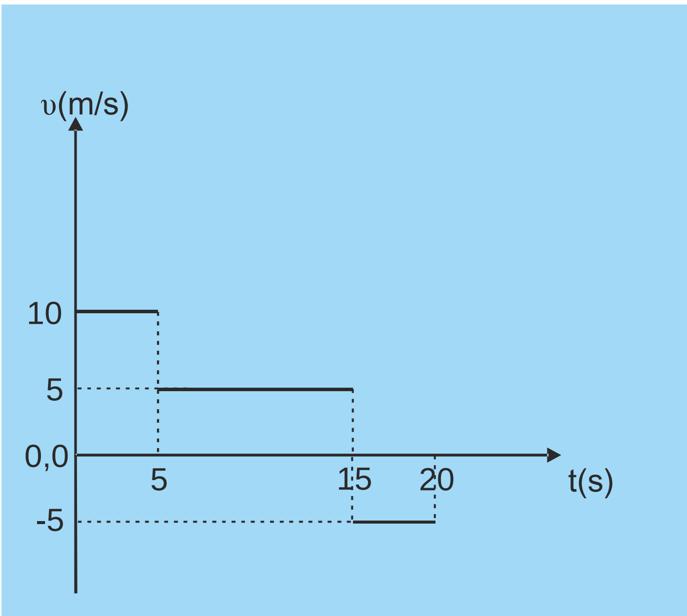
$$x = 20 + 10(t-4) \quad (S.I.)$$

Έτσι για παράδειγμα για την θέση του αυτοκινήτου τη στιγμή t_4=9s, (ερώτημα iii) θα είχαμε, με απευθείας αντικατάσταση:

$$x = 20 + 10(t-4) \rightarrow x_4 = \left(20 + 10(9-4)\right)m = 70m$$

2)

Ένα σώμα κινείται σε ευθεία, η οποία ταυτίζεται με τον άξονα x'x. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου (υ - t) για την κίνηση του σώματος. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 το σώμα διέρχεται από τη θέση x_0 = -100m. Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.



Α. Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος

Β. Να υπολογίσετε την μετατόπιση και το διάστημα που διάνυσε το σώμα από τη στιγμή t_0 = 0 εως τη στιγμή t = 20s

Γ. Να βρείτε τη θέση του σώματος την χρονική στιγμή t = 20s

Δ. Ένας συμμαθητής σας υποστηρίζει ότι η μέση (αριθμητική) ταχύτητα του σώματος από τη στιγμή t_0 = 0 εως τη στιγμή t = 20s μπορεί να υπολογιστεί, αν αθροίσουμε τα μέτρα των επιμέρους ταχυτήτων του σώματος στα διάφορα χρονικά διαστήματα της κίνησης και στη συνέχεια διαιρέσουμε δια το πλήθος τους. Δηλαδή στην περίπτωσή μας $\upsilon_{\mu} = \frac{10+5+5}{3} m/s \rightarrow \upsilon_{\mu} = \frac{20}{3} m/s \simeq 6{,}7 m/s$.

Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό αυτό;

Ε. Να γράψετε την εξίσωση θέσης - χρόνου (x - t) για την κίνηση του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t = 20s

Ζ. Να βρείτε τη θέση του σώματος τις χρονικές στιγμές:

α. t_1 = 3s

β. t_2 = 12s

γ. t_3 = 17s

Η. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα θέσης - χρόνου (x - t) για την κίνηση του σώματος

Λύση

Α. Από τη στιγμή t_0 = 0 μέχρι τη στιγμή t = 5s το σώμα έχει ταχύτητα σταθερής τιμής υ = 10m/s και αφού κινείται ευθύγραμμα, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή με υ = 10m/s και κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Από τη στιγμή t = 5s μέχρι τη στιγμή t = 15s το σώμα έχει ταχύτητα σταθερής τιμής

υ = 5m/s και αφού κινείται ευθύγραμμα, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή με υ = 5m/s και κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Από τη στιγμή t = 15s μέχρι τη στιγμή t = 20s το σώμα έχει ταχύτητα σταθερής τιμής υ = -5m/s και αφού κινείται ευθύγραμμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή με υ = -5m/s και κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Β. Η μετατόπιση του σώματος ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν των παραλληλογράμμων, μεταξύ του διαγράμματος ταχύτητας και του άξονα του χρόνου στο διάγραμμα υ – t. Επομένως:

Από τη στιγμή t_0 = 0 μέχρι τη στιγμή t = 5s είναι $\Delta x_1 = 5\ s \cdot\ 10 m/s \rightarrow \Delta x_1 = 50m$

Από τη στιγμή t = 5s μέχρι τη στιγμή t = 15s είναι $\Delta x_2 = 10\ s \cdot\ 5 m/s \rightarrow \Delta x_2 = 50m$

Από τη στιγμή t = 15s μέχρι τη στιγμή t = 20s είναι $\Delta x_3 = 5\ s \cdot\ (-5 m/s) \rightarrow \Delta x_3 = -25m$

Έτσι η μετατόπιση του σώματος από τη στιγμή t_0 = 0 μέχρι τη στιγμή t = 20s έχει τιμή

$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \rightarrow \Delta x = 75m$ και κατεύθυνση προς τα δεξιά, ενώ

το διάστημα που διάνυσε το σώμα στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι $S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| \rightarrow S = 125m$

Γ. Από τον ορισμό της μετατόπισης έχουμε

$$\Delta x = x_{τελ} - x_{αρχ} \rightarrow x_{τελ} = x_{αρχ} + \Delta x \rightarrow x_{τελ} = x_0 + \Delta x \rightarrow x_{τελ} = -25m$$

Δ. Η μέση (αριθμητική) ταχύτητα από τη τη στιγμή t_0 = 0 μέχρι τη στιγμή t = 20s έχει τιμή

$$\upsilon_{\mu} = \frac{S}{\Delta t} \rightarrow \upsilon_{\mu} = \frac{125}{20} m/s \rightarrow \upsilon_{\mu} = 6{,}25 m/s$$

Έτσι ο ισχυρισμός του συμμαθητή σας είναι λανθασμένος. Που βρίσκεται όμως το λάθος;

Είναι $\upsilon_{\mu} = \frac{S}{\Delta t} \rightarrow \upsilon_{\mu} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3|}{\Delta t} \rightarrow \upsilon_{\mu} = \frac{\upsilon_1 \cdot \Delta t_1 + \upsilon_2 \cdot \Delta t_2 + \upsilon_3 \cdot \Delta t_3}{\Delta t}$ (1)

όπου Δt_1, Δt_2, Δt_3 οι διάρκειες των επιμέρους κινήσεων. Αν ήταν $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \frac{\Delta t}{3}$ τότε η σχέση (1) θα έδινε

$$\upsilon_{\mu} = \frac{\upsilon_1 \cdot \frac{\Delta t}{3} + \upsilon_2 \cdot \frac{\Delta t}{3} + \upsilon_3 \cdot \frac{\Delta t}{3}}{\Delta t} \rightarrow \upsilon_{\mu} = \frac{\frac{\Delta t}{3} \cdot (\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3)}{\Delta t} \rightarrow \upsilon_{\mu} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3}{3}$$

οπότε ο ισχυρισμός θα ήταν σωστός.

Ε. Η γενική εξίσωση θέσης στην ευθύγραμμη ομαλή είναι της μορφής

$$x = x_0 + \upsilon \cdot (t - t_0) \qquad (2)$$

Θα εφαρμόσουμε με **προσοχή** τη σχέση (2) σε κάθε χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος

Από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή t = 5s η σχέση (2) δίνει

$$x = -100 + 10 \cdot t \text{ (S.I.)} \qquad (3)$$

Για t = 5s η προηγούμενη σχέση δίνει x = -50m. Αυτή είναι η αρχική θέση της επόμενης κίνησης, η οποία αρχίζει τη στιγμή t = 5s.

Έτσι από τη στιγμή t = 5s μέχρι τη στιγμή t = 15s η σχέση (2) δίνει

$$x = -50 + 5 \cdot (t - 5) \text{ (S.I.)} \qquad (4)$$

Για t = 15s η προηγούμενη σχέση δίνει x = 0m. Αυτή είναι η αρχική θέση της επόμενης κίνησης, η οποία αρχίζει τη στιγμή t = 15s.

Έτσι από τη στιγμή t =15s μέχρι τη στιγμή t = 20s η σχέση (2) δίνει

$$x = -5 \cdot (t - 15) \text{ (S.I.)} \qquad (5)$$

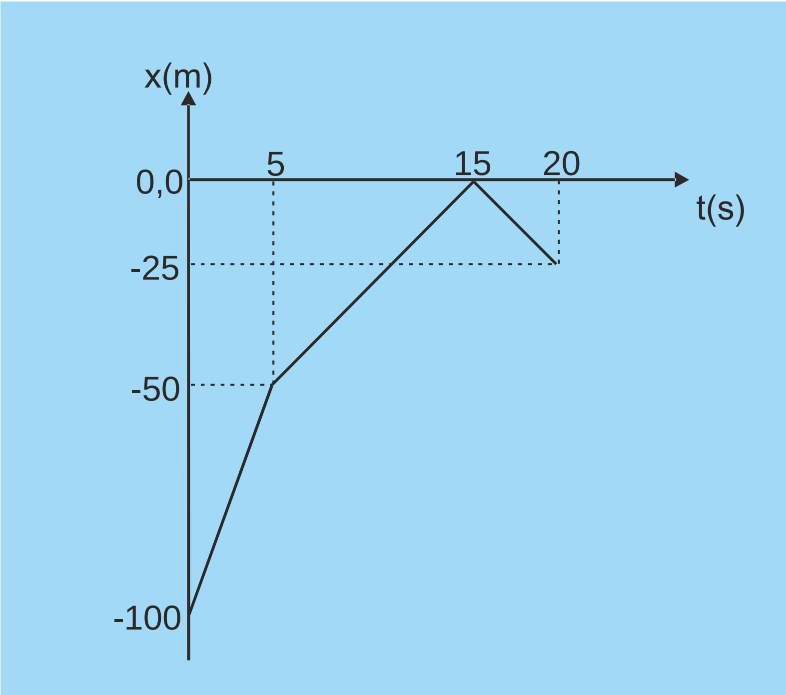
Ζ.

α. η στιγμή t_1 = 3s ανήκει στην πρώτη κίνηση του σώματος, επομένως η σχέση (3) για t = 3s δίνει x = -70m

β. η στιγμή t_2 = 12s ανήκει στη δεύτερη κίνηση του σώματος, επομένως η σχέση (4) για t = 12s δίνει x = -15m

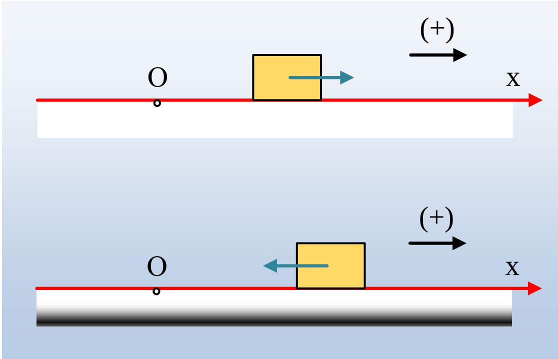
γ. η στιγμή t_3 = 17s ανήκει στην Τρίτη κίνηση του σώματος, επομένως η σχέση (5) για t = 17s δίνει x = -10m

Η. Με βάση τις πληροφορίες του ερωτήματος (Ε) και με δεδομένο ότι στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η κλίση στο διάγραμμα x - t είναι σταθερή, το διάγραμμα x - t είναι το παρακάτω



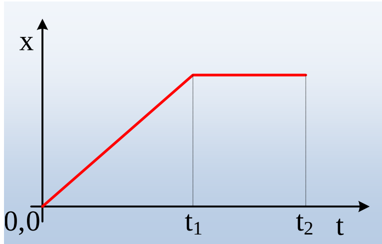
3) Οι παρακάτω ερωτήσεις αναφέρονται στην κίνηση ενός σώματος, κατά μήκος ενός προσανατολισμένου άξονα x, όπου η θετική κατεύθυνση είναι προς τα δεξιά.

Σε κάθε μία, να επιλέξετε την σωστή απάντηση, δίνοντας μια πολύ σύντομη δικαιολόγηση.



Ερώτηση 1η:

Δίνεται το διπλανό διάγραμμα θέσης – χρόνου (x-t)



v) Από 0- t_1 το σώμα επιταχύνεται, ενώ στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα.

vi) Το σώμα και στα δύο χρονικά διαστήματα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

vii) Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση έχουμε μόνο στο πρώτο χρονικό διάστημα, ενώ στη συνέχεια το σώμα παραμένει ακίνητο.

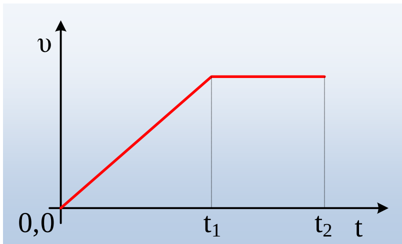
viii) Τη στιγμή t=0 το σώμα ξεκινά να κινείται από την αρχή του άξονα με μηδενική αρχική ταχύτητα και με σταθερή επιτάχυνση.

Απάντηση:

Σωστό το iii). Από 0-t_1 το x είναι ανάλογο του χρόνου (ΕΟΚ), ενώ στη συνέχεια δεν αλλάζει η θέση (x=σταθερό).

Ερώτηση 2η:

Δίνεται το διπλανό διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου (υ-t)



i) Από 0- t_1 το σώμα επιταχύνεται, ενώ στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα.

ii) Το σώμα και στα δύο χρονικά διαστήματα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

iii) Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση έχουμε μόνο στο πρώτο χρονικό διάστημα, ενώ στη συνέχεια το σώμα παραμένει ακίνητο.

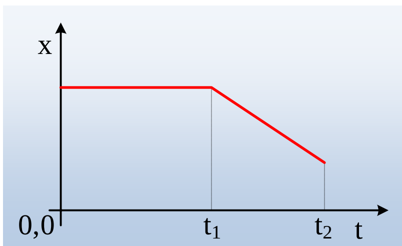
iv) Τη στιγμή t=0 το σώμα ξεκινά να κινείται από την αρχή του άξονα με μηδενική αρχική ταχύτητα και με σταθερή επιτάχυνση.

Απάντηση:

Σωστό το i). Αρχικά αυξάνεται η ταχύτητα (άρα έχουμε επιτάχυνση), ενώ στη συνέχεια δεν αλλάζει.

Ερώτηση 3η:

Δίνεται το διπλανό διάγραμμα θέσης – χρόνου (x-t)



i) Από 0- t_1 το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, ενώ στη συνέχεια επιβραδύνεται.

ii) Στο χρονικό διάστημα t_1- t_2 το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα αριστερά.

iii) Το σώμα και στα δύο χρονικά διαστήματα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

iv) Τη στιγμή t=0 το σώμα ξεκινά να κινείται από μια θέση δεξιά της θέσης Ο (αρχή του άξονα) με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Απάντηση:

Σωστό το ii). Η κλίση στο διάγραμμα είναι αρνητική, άρα αρνητική ταχύτητα, κίνηση προς τα αριστερά.

Ερώτηση 4^{η}:

Δίνεται το διπλανό διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου (υ-t)

i) Το σώμα και στα δύο χρονικά διαστήματα έχει επιτάχυνση.

ii) Στο χρονικό διάστημα t_1- t_2 το σώμα κινείται προς τα αριστερά.

iii) Από 0- t_1 το σώμα κινείται ευθύγραμμα ομαλά, ενώ στη συνέχεια επιβραδύνεται.

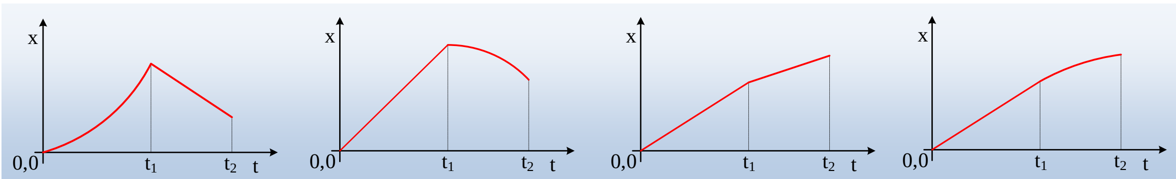
iv) Τη στιγμή t=0 το σώμα ξεκινά να κινείται από μια θέση δεξιά της θέσης Ο (αρχή του άξονα) με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Απάντηση:

Σωστό το iii). Από 0-t_1 έχουμε σταθερή ταχύτητα (προς τα δεξιά), ενώ στη συνέχεια το σώμα κινείται προς τα δεξιά επίσης, αλλά με ταχύτητα που μειώνεται.

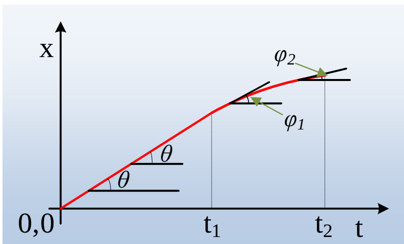
Ερώτηση 5^{η}:

Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα μπορεί να παριστάνει σωστά τη θέση του σώματος, σε συνάρτηση με το χρόνο, στην περίπτωση που η ταχύτητά του μεταβάλλεται όπως στην 4^{η} ερώτηση;



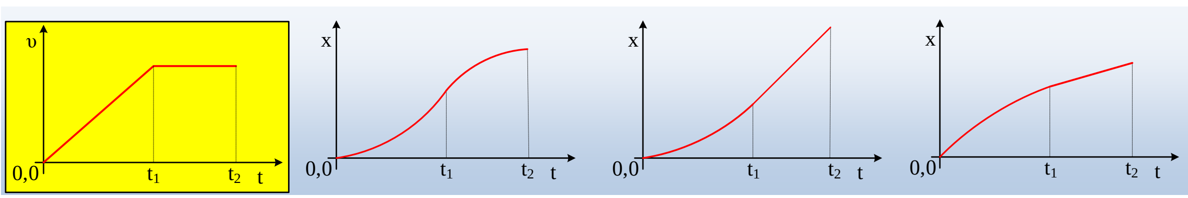
Απάντηση:

Σωστό είναι το τελευταίο διάγραμμα. Στο πρώτο χρονικό διάστημα η κίνηση είναι ευθύγραμμη, άρα σταθερή κλίση στο διάγραμμα x-t, ενώ στη συνέχεια η κλίση (που εκφράζει την ταχύτητα) πρέπει να μειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα, έχουν σημειωθεί οι κλίσεις από 0-t_1 και στο διάστημα t_1-t_2, όπου $\varphi_1 > \varphi_2$.



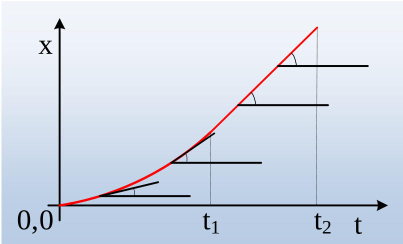
Ερώτηση 6^{η}:

Αν η ταχύτητα του σώματος, μεταβάλλεται όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, ποιο από τα επόμενα διαγράμματα x-t, μπορεί να παριστάνει τη θέση του σε συνάρτηση με το χρόνο;

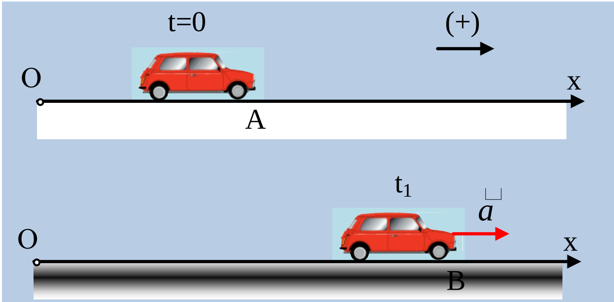


Απάντηση:

Από 0-t_1 η κίνηση είναι επιταχυνόμενη και η κλίση στο διάγραμμα x-t αυξάνεται, αφού αυξάνεται η ταχύτητα. Στη συνέχεια η ταχύτητα παραμένει σταθερή, άρα θα έχουμε και σταθερή κλίση. Αυτό συμβαίνει στο μεσαίο σχήμα:



4)Στο σημείο Α ενός ευθύγραμμου δρόμου ηρεμεί ένα μικρό αυτοκίνητο, απέχοντας κατά 50m, από ένα σημείο Ο, το οποίο θεωρούμε ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα x, με θετική φορά προς τα δεξιά. Σε μια στιγμή t=0, το αυτοκίνητο αποκτά σταθερή επιτάχυνση με κατεύθυνση προς τα δεξιά και μέτρο α=2m/s^2, για χρονικό διάστημα 10s, οπότε μηδενίζεται η επιτάχυνση και το αυτοκίνητο συνεχίζει οπότε μετά από λίγο περνά από το σημείο Γ, απέχοντας κατά 350m από το σημείο Ο.



i) Για τη χρονική στιγμή t_1=5s να βρεθούν η μετατόπιση, η θέση και η ταχύτητα του αυτοκινήτου;

ii) Να βρεθεί η θέση του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα υ_2=16m/s.

iii) Να γίνουν τα διαγράμματα της ταχύτητας με το χρόνο, υ=υ(t), και της θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο, x=x(t), μέχρι τη στιγμή που το αυτοκίνητο φτάνει στη θέση Γ.

Απάντηση:

Για την κίνηση του αυτοκινήτου, από t=0 έως t=10s, (για όσο χρόνο επιταχύνεται), το οποίο ξεκινά από την ηρεμία (υ_0=0) τη στιγμή t=0, ισχύουν οι εξισώσεις:

Για την ταχύτητα: $\upsilon = \alpha t$ (1)

Για την μετατόπιση: $\Delta x = \frac{1}{2}at^2$ (2)

Για την θέση: $\Delta x = x - x_0 \rightarrow x = x_0 + \Delta x \rightarrow$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (3)$$

i)Αντικαθιστώντας t=t_1=5s στις παραπάνω σχέσεις, όπου $x_0=x_A$=50m, παίρνουμε:

$$\Delta x = \Delta x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}2\cdot 5^2 m = 25m$$

$$x = x_1 = x_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 50m + 25m = 75m$$

$\upsilon=\upsilon_1= \alpha\cdot t_1=2\cdot 5m/s= 10m/s.$

ii)Από την εξίσωση (1) βρίσκουμε την χρονική στιγμή t_2, όπου υ_2=16m/s:

$$\upsilon_2 = \alpha t_2 \rightarrow t_2 = \frac{\upsilon_2}{a} = \frac{16}{2}s = 8s$$

Και με αντικατάσταση στην (3) θα έχουμε:

$$x_2 = x_0 + \frac{1}{2}\alpha t_2^2 = 50m + \frac{1}{2}2\cdot 8^2 m = 114m$$

iii)Το αυτοκίνητο επιταχύνεται μέχρι τη στιγμή t_3=10s, αποκτώντας ταχύτητα:

$$\upsilon_3=\alpha\cdot t_3= 2\cdot 10m/s= 20m/s$$

έχοντας φτάσει στη θέση:

$$x_3 = x_0 + \frac{1}{2}\alpha t_3^2 = 50m + \frac{1}{2}2\cdot 10^2 m = 150m$$

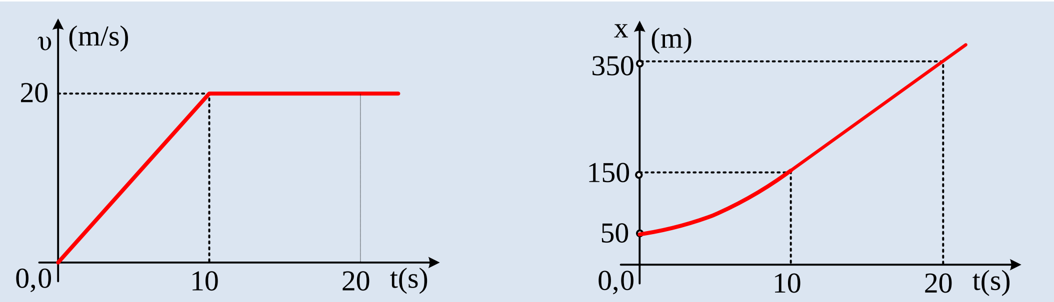
Ενώ στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα, μετατοπιζόμενο κατά:

$$\Delta x_{3,4}=x_\Gamma - x_3=350m - 150m =200m \rightarrow$$

$$\Delta x_{3,4} = \upsilon_3 \Delta t_{3,4} \quad \rightarrow \quad \Delta t_{3,4} = \frac{\Delta x_{3,4}}{\upsilon_3} = \frac{200m}{20m/s} = 10s$$

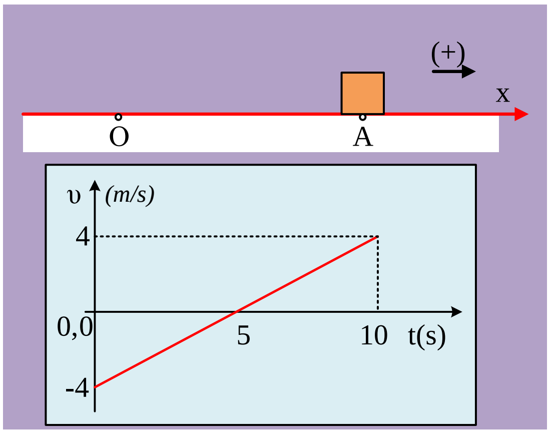
Άρα στη θέση Γ φτάνει τη χρονική στιγμή t_4= t_3+ $\Delta t_{3,4}$=10s+10s=20s.

Με βάση τις παραπάνω τιμές, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Όπου η μορφή της x=x(t) από 0-10s είναι μια παραβολή με τα κοίλα άνω (η συνάρτηση $x = x_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2$ είναι δευτέρου βαθμού) , ενώ στη συνέχεια έχουμε ευθεία γραμμή για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

5)Ένα σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και τη στιγμή t=0, περνά από ένα σημείο Α, το οποίο απέχει 10m από την αρχή Ο ενός προσανατολισμένου άξονα, όπου η προς τα δεξιά κατεύθυνση ορίζεται ως θετική. Στο διάγραμμα του σχήματος, φαίνεται ο τρόπος που μεταβάλλεται η ταχύτητα του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.



i) Η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t=0 είναι προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά;

ii) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές t_1=2s και t_2=8s.

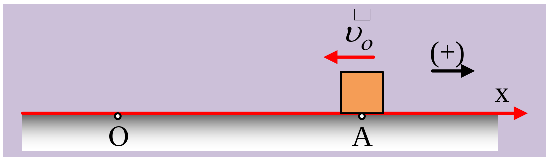
iii) Ποια η τιμή της ταχύτητας του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές;

iv) Για τη χρονική στιγμή t_3=5s, να υπολογιστούν:

α) Η επιτάχυνση, β) η ταχύτητα και γ) η μετατόπιση και η θέση του σώματος.

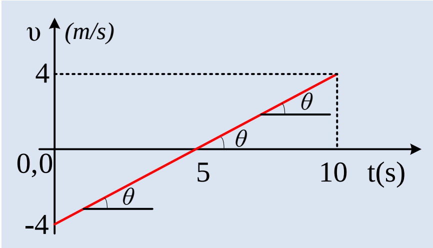
v) Ποια είναι η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t_4=10s;

Απάντηση:



i)Αφού η θετική φορά του άξονα είναι προς τα δεξιά και η ταχύτητα του σώματος είναι αρνητική, σημαίνει ότι το σώμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα, δηλαδή προς τα αριστερά.

ii)Στο διάγραμμα υ-t η κλίση, είναι αριθμητικά ίση με την επιτάχυνση του σώματος. Αλλά η κλίση της ευθείας, είναι σταθερή, σε όποιο σημείο και αν την αναζητήσουμε, πράγμα που σημαίνει ότι και η επιτάχυνση παραμένει σταθερή, ίση και με την μέση επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα από 0-10s.



$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta}=\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}=\frac{\upsilon_4-\upsilon_0}{t_4-t_0}=\frac{4-(-4)}{10-0}m/s^2=\frac{8}{10}m/s^2=0{,}8m/s^2$$

iii)Αφού η κίνηση του σώματος πραγματοποιείται με σταθερή επιτάχυνση, πρόκειται για μια ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, στην οποία η ταχύτητα υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\upsilon=\upsilon_o+\alpha t$$

Με αντικατάσταση του χρόνου, για τις παραπάνω χρονικές στιγμές, θα πάρουμε:

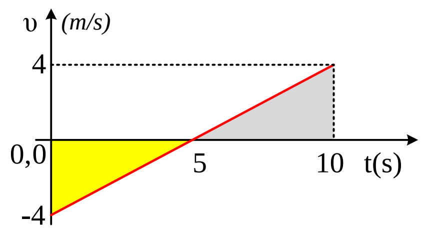
$$\upsilon_1=\upsilon_o+\alpha t_1=-4m/s+0{,}8\cdot 2m/s=-4m/s+1{,}6m/s=-2{,}4m/s$$
$$\upsilon_2=\upsilon_o+\alpha t_2=-4m/s+0{,}8\cdot 8m/s=-4m/s+6{,}4m/s=+2{,}4m/s$$

iv)Σύμφωνα με το ii) ερώτημα η επιτάχυνση του σώματος παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης.

α) Έτσι και τη στιγμή t_3=5s έχει τιμή α_3=0,8m/s^2.

β) Με βάση το διάγραμμα βλέπουμε ότι τη στιγμή αυτή η ταχύτητα μηδενίζεται (υ_3=0).

γ) Στο διάγραμμα υ-t, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση κα τον άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με την μετατόπιση του σώματος. Έτσι από 0-t_3 η μετατόπιση του σώματος θα υπολογίζεται από το εμβαδόν του τριγώνου, με κίτρινο χρώμα στο διάγραμμα (Δx=-Ε, αφού το χωρίο είναι κάτω από τον άξονα και η μετατόπιση είναι αρνητική):



$$\Delta x_3=-\frac{1}{2}\beta\upsilon=-\frac{1}{2}5\cdot 4m=-10m$$

Όμως για την μετατόπιση αυτή ισχύει:

$$\Delta x_3=x_3-x_o\rightarrow x_3=\Delta x_3+x_o=-10m+10m=0$$

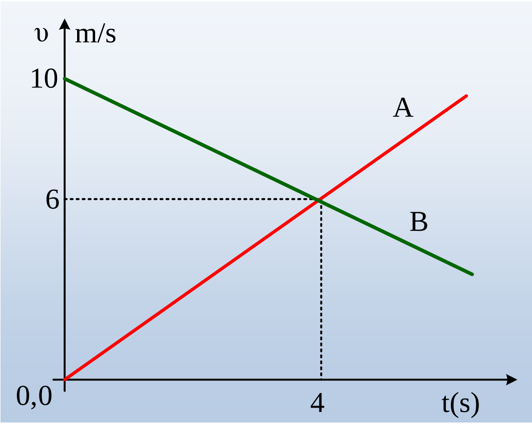
Δηλαδή το σώμα σταματά την προς τα αριστερά του κίνηση, πριν κινηθεί προς τα δεξιά, στην αρχή του άξονα Ο, με x=0.

v)Με βάση την λογική του παραπάνω ερωτήματος, η μετατόπιση του σώματος από 0-t_4, θα υπολογιστεί ως άθροισμα των μετατοπίσεων από 0-5s και από 5s-10s, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε τα εμβαδά των δύο τριγώνων με κίτρινο (το έχουμε ήδη κάνει…) και γκρι χρώμα στο διάγραμμα υ-t. Θα έχουμε:

$$\Delta x_4=\Delta x_{0\rightarrow 5}+\Delta x_{5\rightarrow 10}=-10m+\frac{1}{2}\beta\upsilon=-10m+\frac{1}{2}5\cdot 4m=0$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μας λέει ότι το σώμα τη στιγμή t_4=10s, περνά ξανά από το σημείο Α, στη θέση $x_A=x_o$=10m, κινούμενο με θετική ταχύτητα, προς τα δεξιά.

6) Σε ευθύγραμμο δρόμο, μπροστά από ένα φανάρι, που έχει ανάψει το κόκκινο, έχει σταματήσει ένα αυτοκίνητο Α. Τη στιγμή $t_0=0$, που ανοίγει το πράσινο, ο οδηγός του αυτοκινήτου Α, το θέτει σε κίνηση, ενώ ταυτόχρονα ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β, το οποίο «έρχεται με ταχύτητα», περνάει δίπλα του. Στο διάγραμμα δίνονται οι ταχύτητες των δύο αυτοκινήτων σε συνάρτηση με το χρόνο.



i) Να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των δύο αυτοκινήτων.

ii) Να βρεθούν οι ταχύτητες των αυτοκινήτων τη χρονική στιγμή $t_1=3{,}2s$.

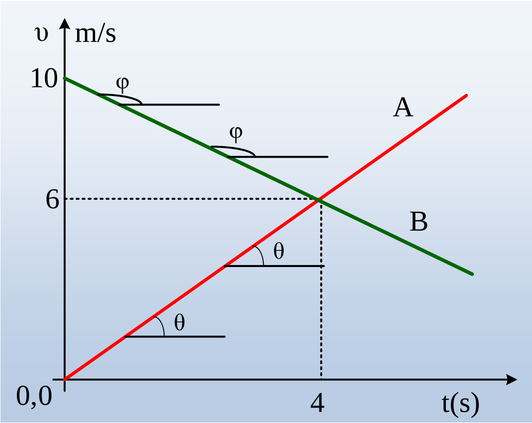
iii) Ποια χρονική στιγμή t_2 θα σταματήσει το Β αυτοκίνητο (θα μηδενιστεί η ταχύτητά του και θα παραμείνει ακίνητο), αν δεν αλλάξουν κίνηση τα δύο αυτοκίνητα, και πόσο θα απέχουν μεταξύ τους τη στιγμή αυτή;

Απάντηση:

i) Στο διάγραμμα υ-t, η κλίση μας δίνει την επιτάχυνση του κινητού. Αλλά τότε και τα δύο οχήματα κινούνται με σταθερές επιταχύνσεις, αφού οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες με σταθερές κλίσεις. Αν όμως έχουμε σταθερή επιτάχυνση, τότε η στιγμιαία τιμή της είναι ίση με την μέση επιτάχυνση στο διάστημα 0-4s, οπότε:

$$\alpha_1 = \alpha_{1,\mu} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{6-0}{4-0} m/s^2 = 1{,}5 m/s^2.$$

$$\alpha_2 = \alpha_{2,\mu} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{6-10}{4-0} m/s^2 = -1 m/s^2.$$



ii) Αφού τα δυο αυτοκίνητα έχουν σταθερές επιταχύνσεις, εκτελούν ευθύγραμμες ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις (επιταχυνόμενη το Α και επιβραδυνόμενη το Β), για τις οποίες ισχύει:

$$\upsilon = \upsilon_o + \alpha t \quad (1)$$

Με βάση το διάγραμμα, το Α αυτοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία με αρχική ταχύτητα $\upsilon_{01}=0$, ενώ το Β με $\upsilon_{02}=10m/s$, όποτε με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{o1} + \alpha_1 t = \alpha t = 1{,}5 \cdot 3{,}2 m/s = 4{,}8 m/s$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_{o2} + \alpha_2 t = 10 m/s + (-1) \cdot 3{,}2 m/s = 6{,}8 m/s$$

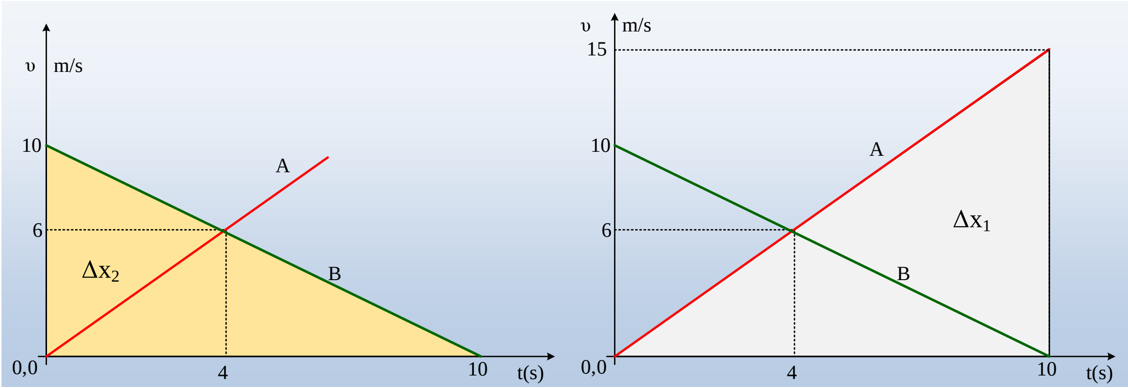
iii) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) υ=0 για το Β αυτοκίνητο, βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που σταματά:

$$\upsilon_2 = \upsilon_{o2} + \alpha_2 t_2 \rightarrow 0 = \upsilon_{o2} + \alpha_2 t_2 \rightarrow$$

$$t_2 = -\frac{\upsilon_{o2}}{a_2} = -\frac{10}{-1} s = 10s$$

Για να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις των δύο αυτοκινήτων, μέχρι τη στιγμή $t_2=10s$, έχουμε δυο τρόπους.

α) Με χρήση των διαγραμμάτων των ταχυτήτων, προεκτείνοντας τις ευθείες, μέχρι τη στιγμή t_2:



Έτσι για το Β αυτοκίνητο, η μετατόπιση είναι ίση με το εμβαδόν του τριγώνου στο πρώτο σχήμα:

$$\Delta x_2 = x_2 = \frac{1}{2}10 \cdot 10m = 50m$$

Ενώ για το Α αυτοκίνητο, αφού λάβουμε υπόψη ότι την στιγμή t_2 έχει ταχύτητα $\upsilon_1=\alpha t_2=15m/s$, η μετατόπισή του είναι ίση με το εμβαδόν του γκρι τριγώνου, στο δεύτερο σχήμα:

$$\Delta x_1 = x_1 = \frac{1}{2}10 \cdot 15m = 75m$$

Με βάση τις τιμές αυτές, η απόσταση των δύο αυτοκινήτων θα είναι:

$$d=x_1-x_2=75m-50m=25\ m$$

β) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της μετατόπισης:

$$\Delta x = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση t=10s, παίρνουμε:

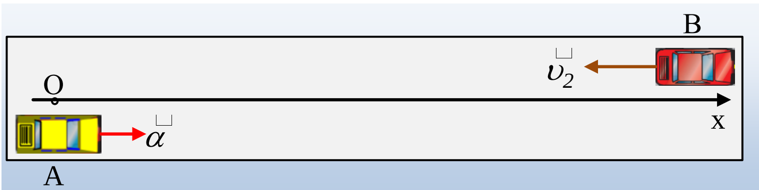
$$\Delta x_1 = x_1 = \upsilon_{o1}t + \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 = \frac{1}{2}1{,}5 \cdot 10^2 m = 75m$$

$$\Delta x_2 = x_2 = \upsilon_{o2}t + \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 = 10 \cdot 10m + \frac{1}{2}(-1) \cdot 10^2 m = 50m$$

Οπότε και πάλι:

$$d=x_1-x_2=75m-50m=25\ m$$

7)



Σε ένα σημείο Ο, ενός ευθύγραμμου δρόμου βρίσκεται ακίνητο ένα αυτοκίνητο Α, ενώ ένα δεύτερο όχημα Β κινείται προς το Α. Κάποια στιγμή $t_0=0$ το αυτοκίνητο Α αρχίζει να κινείται προς το Β, με σταθερή επιτάχυνση και λαμβάνοντας το σημείο Ο ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα x, παίρνουμε τις θέσεις των δύο αυτοκινήτων σε συνάρτηση με το χρόνο, σχεδιάζοντας το διπλανό γράφημα x-t.

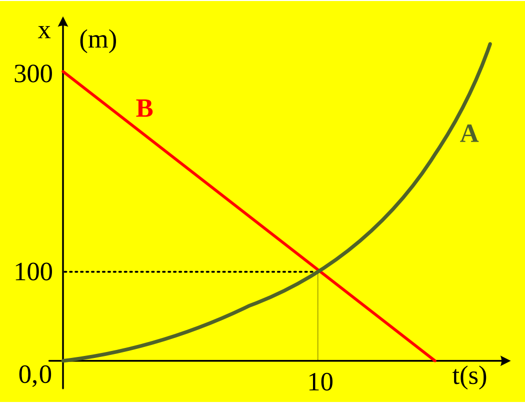
i) Μπορείτε να περιγράψτε τις κινήσεις των δύο αυτοκινήτων;

ii) Ποια η απόσταση μεταξύ των δύο οχημάτων τη στιγμή της εκκίνησης του Α;

iii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του Α οχήματος και η ταχύτητά του τη στιγμή της διασταύρωσής του με το Β.

iv) Να βρεθούν οι μετατοπίσεις των δύο αυτοκινήτων τη στιγμή t_1=10s. Με ποια ταχύτητα κινείται το Β αυτοκίνητο;

iv) Σε ποια θέση βρίσκεται το Α αυτοκίνητο, όταν το Β φτάνει στο σημείο Ο;



Απάντηση:

i)Το Α αυτοκίνητο έχει σταθερή επιτάχυνση, οπότε εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη) κίνηση. Το Β κινείται με σταθερή ταχύτητα, αφού η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα x-t, είναι σταθερή, οπότε η κίνησή του είναι ευθύγραμμη ομαλή.

ii)Τη στιγμή t=0, το Α αυτοκίνητο βρίσκεται στη θέση x=0, ενώ το Β στη θέση x_{02}=300m. Άρα η μεταξύ των δύο αυτοκινήτων απόσταση είναι d=300m.

iii)Για την κίνηση του Α αυτοκινήτου ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_1 = \alpha t \quad (1) \quad \text{και} \quad x_1 = \frac{1}{2}at^2 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση στην (2) t=10s (όπου έχουμε τη συνάντηση των δύο κινητών) και x=100m, παίρνουμε:

$$100 = \frac{1}{2}a \cdot 10^2 \rightarrow \alpha\text{=}2m/s^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \alpha t_1 = 2 \cdot 10m/s = 20m/s$$

iv)Τη στιγμή t_1=10s, τα δύο αυτοκίνητα έχουν μετατοπισθεί κατά:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 100m - 0 = 100m$$

$$\Delta x_2 = x_{1,2} - x_{0,2} = 100m - 300m = -200m$$

Ενώ αφού η ταχύτητά του Β παραμένει σταθερή, κάθε στιγμή η ταχύτητά του είναι ίση και με την μέση ταχύτητα στο διάστημα από 0-10s:

$$\upsilon_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{-200m}{10s} = -20m$$

v)Για την μετατόπιση του Β αυτοκινήτου μέχρι τη στιγμή που φτάνει στο Ο ισχύει:

$$\upsilon_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \rightarrow \upsilon_2 = \frac{x_2 - x_{02}}{t_2 - t_0} \rightarrow -20 = \frac{0-300}{t_2} \rightarrow$$

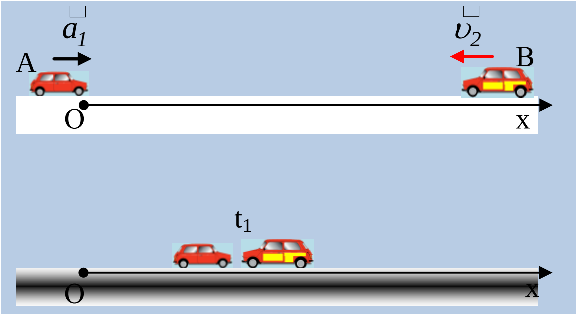
$$-20t_2 = -300 \rightarrow$$

$$t_2 = 15s$$

Και με αντικατάσταση στην (2) βρίσκουμε την θέση του Α αυτοκινήτου τη στιγμή t_2=15s:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 15^2 m = 225m$$

8) Σε ένα ευθύγραμμο δρόμο βρίσκεται ακίνητο ένα αυτοκίνητο Α στη θέση Ο, ενώ ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β κινείται προς το Α με σταθερή ταχύτητα **μέτρου** υ_2=10m/s. Σε μια στιγμή που θεωρούμε ως t_0=0, όπου τα δύο αυτοκίνητα απέχουν απόσταση D, το Α αποκτά σταθερή επιτάχυνση μέτρου α_1=0,5m/s^2, οπότε αρχίζει να κινείται προς συνάντηση του Β. Τη στιγμή που τα δύο αυτοκίνητα διασταυρώνονται έχουν ίσες κατά μέτρο, ταχύτητες.



Θεωρώντας την αρχική θέση του Α αυτοκινήτου σαν αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα x και την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική:

i) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή t_1 συναντώνται τα δυο αυτοκίνητα.

ii) Να γίνουν, σε κοινούς άξονες, οι γραφικές παραστάσεις υ-t, των ταχυτήτων των δύο αυτοκινήτων σε συνάρτηση με το χρόνο και μέχρι τη στιγμή $t_2=t_1$+10s.

iii) Με την βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να υπολογιστεί η αρχική απόσταση D τη στιγμή t_0.

iv) Αφού γράψετε τις εξισώσεις κίνησης (x-t) για κάθε αυτοκίνητο, να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ τους την χρονική στιγμή t_3=8s.

Απάντηση:

Το Α αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\boxed{\upsilon_1 = \alpha_1 t} \ (1) \quad \text{και} \quad \Delta x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 \xrightarrow{x_0=0}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2} \quad (2)$$

Ενώ το Β αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα ομαλά με εξίσωση κίνησης:

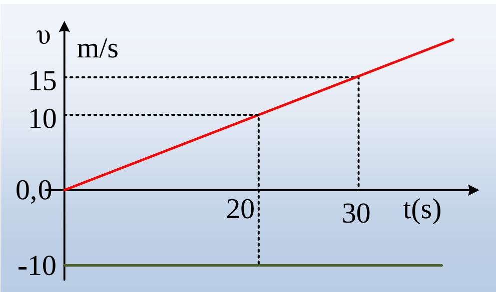
$$\Delta x_2 = \upsilon_2 t \to x_2 - D = -10t \Rightarrow$$

$$\boxed{x_2 = D - 10t} \ (3)$$

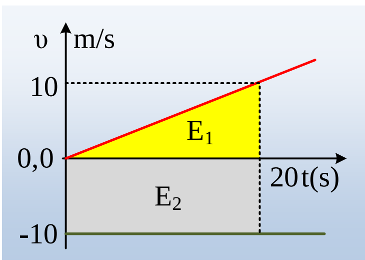
i)Τη στιγμή της διασταύρωσης οι ταχύτητες έχουν ίσα μέτρα, οπότε από την σχέση (1) θα πάρουμε:

$$\upsilon_1 = \alpha_1 t_1 = |\upsilon_2| \to t_1 = \frac{|\upsilon_2|}{\alpha_1} = \frac{10}{0,5}s = 20s$$

ii)Η γραφική παράσταση της σχέσης (1) θα είναι μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων, ενώ για $t_2=t_1$+10s=30s, παίρνει τιμή υ_1=15s. Αντίθετα η ταχύτητα του Β αυτοκινήτου παραμένει σταθερή με τιμή υ_2=-10m/s, με αποτέλεσμα οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις να έχουν τη μορφή του παρακάτω σχήματος.



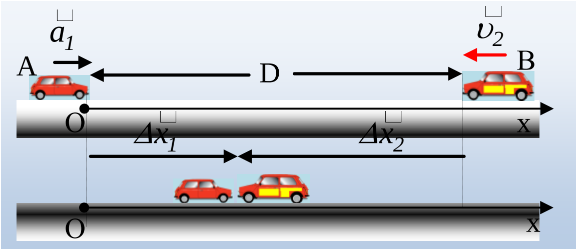
iii)Στο διάγραμμα υ-t το εμβαδόν κάθε χωρίου είναι αριθμητικά ίσο με την μετατόπιση κάθε αυτοκινήτου. Έτσι, μέχρι τη στιγμή t_1 το Α αυτοκίνητο μετατοπίζεται όσο και το



εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου, ενώ το Β, όσο το εμβαδόν του γκρι ορθογωνίου (όπου η μετατόπιση θα είναι απλά αρνητική, αφού το χωρίο είναι κάτω από τον άξονα του x, σε αρνητικές τιμές ταχύτητας):

$$\Delta x_1 = E_1 = \frac{1}{2}\beta\upsilon = \frac{1}{2}20\cdot 10m = 100m$$

$$\Delta x_2 = -E_2 = -20\cdot 10m = -200m$$



Οπότε με βάση το διπλανό σχήμα, έχουμε:

$$D = |\Delta\vec{x}_1| + |\Delta\vec{x}_2| = 100m + 200m = 300m$$

v) Με αντικατάσταση στις εξισώσεις (2) και (3) βρίσκουμε:

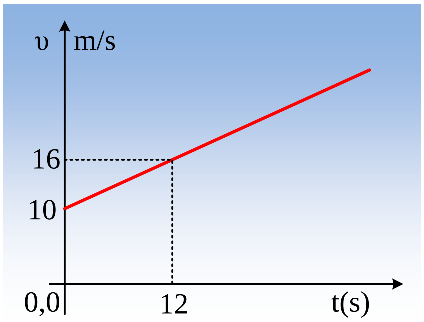
$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{1}{2}0{,}5\cdot 8^2 m = 16m$$

$$x_2 = D - 10t = 300m - 10\cdot 8m = 220m$$

Αλλά τότε η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση:

$$D_1 = x_2 - x_1 = 220m - 16m = 204m$$

9) Κατά μήκος ενός ευθύγραμμου δρόμου, ο οποίος ταυτίζεται με έναν προσανατολισμένο άξονα x, κινείται ένα αυτοκίνητο και κάποια στιγμή, την οποία παίρνουμε ως αρχή μέτρησης των χρόνων (t_0=0), περνά από ένα σημείο Α στη θέση x_0=120m με ταχύτητα η οποία μεταβάλλεται όπως στο σχήμα.



i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του αυτοκινήτου και η μετατόπισή του μέχρι τη στιγμή t_1=12s, η οποία έχει σημειωθεί στο σχήμα.

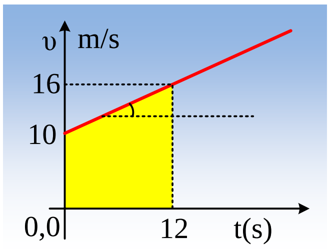
ii) Πόσο χρόνο πρέπει να επιταχύνεται το αυτοκίνητο, προκειμένου να αυξήσει την ταχύτητά του κατά 14,6m/s;

iii) Να γράψετε την εξίσωση υ=υ(t), που μας δίνει την ταχύτητα το αυτοκινήτου σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογίστε την ταχύτητά του τη χρονική t_2= 16,4s.

iv) Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_3=36s, χωρίς να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση κίνησης του αυτοκινήτου.

Απάντηση:

i) Στο διάγραμμα υ-t, η κλίση μας δίνει την επιτάχυνση, ενώ το εμβαδόν του χωρίου (το τραπέζιο με κίτρινο χρώμα στο διπλανό σχήμα) είναι αριθμητικά ίσο με την μετατόπιση του σώματος. Έτσι έχουμε:



$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{16-10}{12-0} m/s^2 = 0{,}5m/s^2.$$

$$\Delta x_1 = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_0}{2} t_1 = \frac{16+10}{2}\cdot 12m = 156m$$

ii) Η κλίση στο διάγραμμα υ-t παραμένει σταθερή, πράγμα που σημαίνει ότι και η επιτάχυνση παραμένει σταθερή. Αλλά τότε:

$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \to \Delta t = \frac{\Delta\upsilon}{\alpha} = \frac{14{,}6}{0{,}5}s = 29{,}2s$$

iii)Αφού έχουμε σταθερή επιτάχυνση, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη) και η εξίσωση της ταχύτητας έχει τη μορφή:

$$\upsilon=\upsilon_0+\alpha t$$

όπου στην περίπτωσή μας, η αρχική ταχύτητα έχει τιμή υ_0=10m/s, ενώ α=0,5m/s^2, οπότε η παραπάνω εξίσωση, παίρνει τη μορφή:

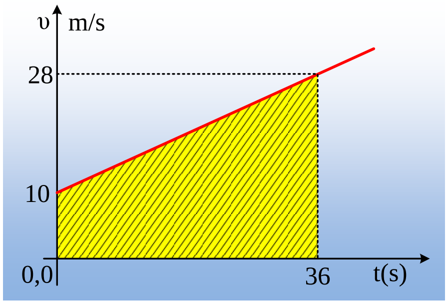
$$\upsilon=10+0{,}5t \quad (1) \quad (\text{ t}\rightarrow\text{s και } \upsilon\rightarrow\text{m/s ή μονάδες στο S.I.})$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση t=16,4s υπολογίζουμε την ταχύτητα υ_2 τη χρονική στιγμή t_2:

$$\upsilon_2=(10+0{,}5\cdot 16{,}4)\ m/s=18{,}2\ m/s$$

iv)Με αντικατάσταση στην εξίσωση (1) t= t_3=36s βρίσκουμε:

$$\upsilon_3=(10+0{,}5\cdot 36)\ m/s=28m/s$$



Ερχόμαστε τώρα στο διάγραμμα υ-t, όπου το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου, του σχήματος, θα είναι αριθμητικά ίσο με την μετατόπιση του σώματος από 0-36s:

$$\Delta x_3=\frac{\upsilon_3+\upsilon_0}{2}t_3=\frac{28+10}{2}\cdot 36m=684m$$

Αλλά η παραπάνω μετατόπιση γράφεται:

$$\Delta x_3=x_3-x_0\longrightarrow$$

$$x_3=x_0+\Delta x_3=120m+684m=804m.$$