1) Σώμα μάζας 1 Kg αφήνεται από ύψος 20 m πάνω από την επιφάνεια του εδάφους. Το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ m / s^2$. Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λαμβάνεται η επιφάνεια του εδάφους.

$Δ_1$. Να υπολογισθούν ο χρόνος μέχρι το σώμα να φτάσει το έδαφος, καθώς και η ταχύτητα με την οποία φτάνει το έδαφος.

$Δ_2$. Ποια η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που η βαρυτική δυναμική του ενέργεια έχει γίνει ίση με την κινητική του.

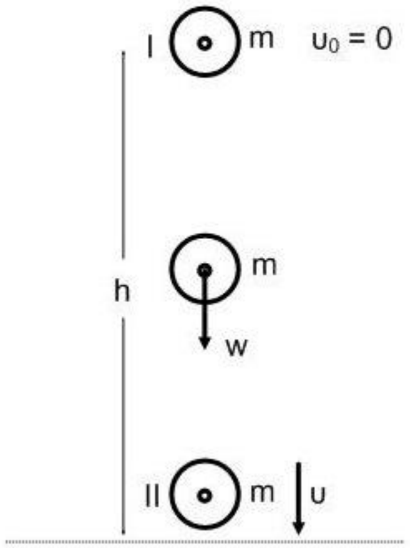
Το σώμα φτάνει στο έδαφος και αναπηδά κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα ίση με το μισό της ταχύτητας με την οποία φτάνει στο έδαφος.

$Δ_3$. Να υπολογισθεί το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα.

$Δ_4$. Πόση μηχανική ενέργεια μετατράπηκε σε άλλη μορφή ενέργειας κατά την αναπήδηση του σώματος;

Λύση

$Δ_1$.



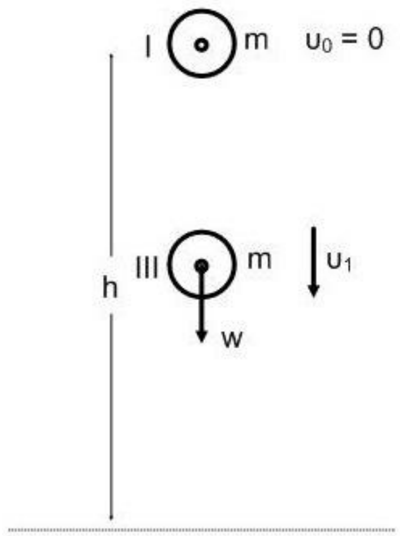
Το σώμα μάζας m εκτελεί ελεύθερη πτώση , το ύψος h σε συνάρτηση με τον χρόνο t :

$h = ½·g·t^2 \Rightarrow 2·h = g·t^2 \Rightarrow t^2 = 2·h / g \Rightarrow t = \sqrt{(2·h / g)} \Rightarrow t = \sqrt{(2·20 / 10)} \Rightarrow t = 2\ s$.

Η ταχύτητα του σώματος :

$υ = g·t \Rightarrow υ = 10·2 \Rightarrow υ = 20\ m / s$.

$Δ_2$.



Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας είναι :

(μια έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει σε συστήματα που δρουν διατηρητικές δυνάμεις, όπως το βάρος w)

$E_I = E_{III} \Rightarrow K_I + U_I = K_{III} + U_{III} \Rightarrow$

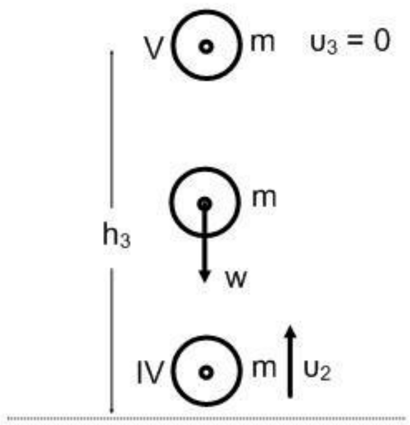
(εφαρμόζετε μεταξύ των θέσεων I και III , το σώμα αφήνεται από ύψος h άρα $K_I = 0$ αφού η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν ενώ $U_I = w·h \Rightarrow U_I = m·g·h$, η εκφώνηση αναφέρει ότι $K_{III} = U_{III}$)

$0 + U_I = K_{III} + K_{III} \Rightarrow U_I = 2·K_{III} \Rightarrow K_{III} = U_I / 2 \Rightarrow K_{III} = m·g·h / 2 \Rightarrow K_{III} = 1·10·20 / 2 \Rightarrow K_{III} = 100$ joule .

Η κινητική ενέργεια ορίζεται :

$K_{III} = ½·m·υ_1^2 \Rightarrow 2·K_{III} = m·υ_1^2 \Rightarrow υ_1^2 = 2·K_{III} / m \Rightarrow υ_1 = \sqrt{2·K_{III} / m} \Rightarrow υ_1 = \sqrt{2·100 / 1} \Rightarrow υ_1 = \sqrt{2·100} \Rightarrow υ_1 = 10·\sqrt{2}$ m / s .

$Δ_3$.



Η ταχύτητα $υ_2$, ταχύτητα μετά την αναπήδηση :

$υ_2 = υ / 2 \Rightarrow υ_2 = 20 / 2 \Rightarrow υ_2 = 10$ m / s .

Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας είναι :

(μια έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει σε συστήματα που δρουν διατηρητικές δυνάμεις, όπως το βάρος w, εφαρμόζετε μεταξύ των θέσεων IV και V)

$E_{IV} = E_V \Rightarrow K_{IV} + U_{IV} = K_V + U_V \Rightarrow$

(στη θέση IV το σώμα βρίσκεται στο επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας άρα $U_{IV} = 0$ ενώ στη θέση V το σώμα έφτασε στο μέγιστο του ύψος άρα $K_V = 0$)

$K_{IV} + 0 = 0 + U_V \Rightarrow K_{IV} = U_V \Rightarrow U_V = ½·m·υ_2^2 \Rightarrow U_V = ½·1·10^2 \Rightarrow U_V = 50$ joule .

Η δυναμική βαρυτική ενέργεια στη θέση V δίνεται :

$U_V = w·h_3 \Rightarrow U_V = m·g·h_3 \Rightarrow h_3 = U_V / m·g \Rightarrow h_3 = 50 / (1·10) \Rightarrow h_3 = 5$ m .

$Δ_4$.

Αρχή διατήρησης της ενέργειας, πριν και μετά την σύγκρουση του σώματος με το έδαφος :

(η γενικότερη μορφή, όπως ακριβώς ισχύει στη φύση η ενέργεια μετατρέπεται και μετασχηματίζεται αλλά ούτε δημιουργείται, ούτε καταστρέφεται)

$K_{πριν} = Q + K_{μετα} \Rightarrow Q = K_{πριν} – K_{μετα} \Rightarrow$

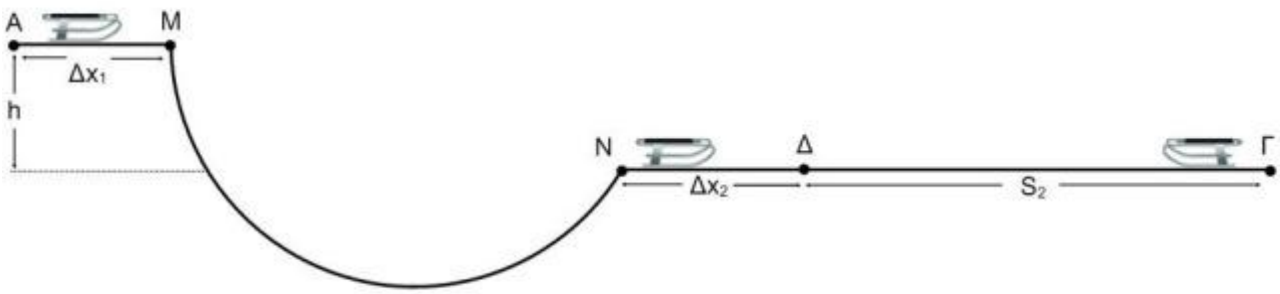
(όπου $K_{πριν} = K_{II}$: η κινητική ενέργεια πριν την κρούση, $K_{μετα} = K_{ιν}$: η κινητική ενέργεια μετά την κρούση, Q : η συνολική ενέργεια που χάνεται κατά την κρούση και γίνεται θερμότητα, ενέργεια που προκαλεί ήχο και διάφορες άλλες μορφές που δεν αφορούν την ύλη της σχολικής τάξης της Α΄ λυκείου)

$Q = K_{II} – K_{IV} \Rightarrow Q = 200 – 50 \Rightarrow Q = 150$ joule .

2) Δύο Λάπωνες $Λ_1$ και $Λ_2$ μπορούν να κινηθούν στις απέναντι οριζόντιες περιοχές μιας καμπυλόγραμμης χαράδρας με παγωμένο χιόνι . Οι δύο περιοχές (1) και (2) δεν έχουν παγωμένο χιόνι και η (1) βρίσκεται 1m πιο ψηλά από την περιοχή (2) .

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s ο $Λ_1$ ασκεί σταθερή οριζόντια δύναμη F = 300 N με κατεύθυνση προς την χαράδρα σε ακίνητο έλκηθρο μάζας m = 100 kg το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής μ = 0,2 με τις δύο οριζόντιες περιοχές και φτάνει στην αριστερή άκρη Μ της χαράδρας την χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s .

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s ο $Λ_2$ διέρχεται από το σημείο Γ της περιοχής (2) με κατεύθυνση προς την χαράδρα με σταθερή ταχύτητα 2 m / s και αφού διατρέξει απόσταση $S_2 = 30$ m συναντά το έλκηθρο το οποίο μόλις σταματά στο σημείο Δ.



Να υπολογιστούν :

$Δ_1$. Τα μέτρα των επιταχύνσεων που έχει το έλκηθρο στις δύο περιοχές .

$Δ_2$. Το μέτρο της ταχύτητας εισόδου και εξόδου στη χαράδρα.

$Δ_3$. Ο χρόνος κίνησης του ελκήθρου στην χαράδρα.

$Δ_4$. Οι μετατοπίσεις $Δx_1$ και $Δx_2$ του ελκήθρου στις δύο περιοχές και το συνολικό έργο της τριβής .

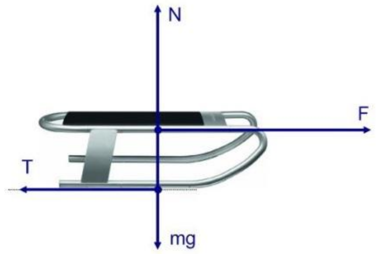
$Δ_5$. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ελκήθρου τη χρονική στιγμή $t_3 = 14$ s.

Δίνεται $g = 10 \, m / s^2$.

Λύση

$Δ_1$.

Περιοχή (1)



2ος νόμος του Newton :

$ΣF_x = m·α_1 \Rightarrow F – T = m·α_1 \Rightarrow α_1 = F – T / m$.

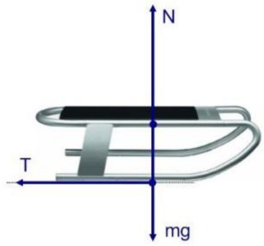
Για την τριβή έχουμε :

$T = μ·N \Rightarrow T = μ·m·g \Rightarrow T = 0{,}2·100·10 \Rightarrow T = 200 \, N$.

Άρα :

$α_1 = F – T / m \Rightarrow α_1 = 300 – 200 / 100 \Rightarrow α_1 = 1 \, m / s^2$.

Περιοχή (2)



2ος νόμος του Newton :

$ΣF_x = m·α_2 \Rightarrow – μ·m·g = m·α_2 \Rightarrow α_2 = – μ·g \Rightarrow α_2 = – 0{,}2·10 \Rightarrow |α_2| = 2 \, m / s^2$, το μέτρο .

$Δ_2$.

Για την ταχύτητα εισόδου στην χαράδρα , θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της ταχύτητας στην περιοχή (1).

Έχουμε κίνηση ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη :

$υ_1 = α_1·Δt_1 \Rightarrow$

$(Δt_1 = t_1 – t_0 \Rightarrow Δt_1 = 4 – 0 \Rightarrow Δt_1 = 4 \, s)$

$υ_1 = 1·4 \Rightarrow υ_1 = 4 \, m / s$.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα εξόδου $υ_2$, εφαρμόζουμε την

Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

(άλλη έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει σε συστήματα όπου στα σώματα του συστήματος δρα μόνο το βάρος τους , μια διατηρητική δύναμη)

για τις θέσεις εισόδου (Μ) και εξόδου (Ν) :

{το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας $U_N = 0$, στη περιοχή (2)}

$E_M = E_N \Rightarrow K_M + U_M = K_N + U_N \Rightarrow ½·m·υ_1^2 + m·g·h = ½·m·υ_2^2 \Rightarrow υ_2^2 = υ_1^2 + 2·g·h \Rightarrow$

$υ_2 = \sqrt{(υ_1^2 + 2·g·h)} \Rightarrow υ_2 = \sqrt{(4^2 + 20)} \Rightarrow υ_2 = 6 \, m / s$.

$Δ_3$.

Ο συνολικός χρόνος κίνησης του ελκήθρου είναι ίσος με τον χρόνο που χρειάζεται ο $Λ_2$ για να διατρέξει $S_2 = 30 \, m$.

(ο $Λ_2$ κινείται με σταθερή ταχύτητα άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση)

$υ_2 = S_2 / t_{ολ} \Rightarrow t_{ολ} = S_2 / υ_2 \Rightarrow t_{ολ} = 30 / 2 \Rightarrow t_{ολ} = 15 \, s$.

Ο χρόνος στη περιοχή (1) είναι $Δt_1$, ο χρόνος στη χαράδρα είναι $Δt_x$, ο χρόνος στην περιοχή (2) είναι $Δt_2$.

Ισχύει :

$t_{ολ} = Δt_1 + Δt_x + Δt_2 \Rightarrow Δt_x = t_{ολ} – (Δt_1 + Δt_2)$.

Το $Δt_1 = 4 \, s$.

Για το $Δt_2$ έχουμε από την εξίσωση της ταχύτητας στην περιοχή (2) :

$υ = υ_2 – α_2·Δt$, αν $Δt = Δt_2$ τότε $υ = 0$:

$0 = υ_2 – α_2·Δt_2 \Rightarrow Δt_2 = υ_2 / α_2 \Rightarrow Δt_2 = 6 / 2 \Rightarrow Δt_2 = 3 \, s$.

Άρα :

$Δt_x = t_{ολ} – (Δt_1 + Δt_2) \Rightarrow Δt_x = 15 – (4 + 3) \Rightarrow Δt_x = 8 \, s$.

$Δ_4$.

Για το $Δx_1$ έχουμε :

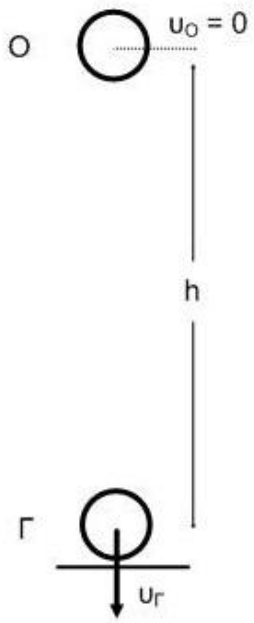
$Δx_1 = ½·α_1·Δt_1^2 \Rightarrow Δx_1 = ½·1·4^2 \Rightarrow Δx_1 = 8 \, m$.

Για το $Δx_2$ έχουμε :

$Δx_2 = υ_2·Δt_2 – ½·α_2·Δt_2^2 \Rightarrow Δx_2 = 6·3 – ½·2·3^2 \Rightarrow Δx_2 = 9 \, m$.

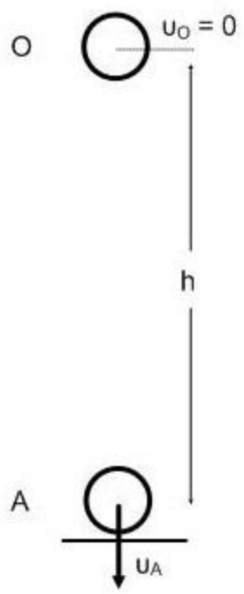
Για το έργο της τριβής :
$W_T = T \cdot \Delta x \cdot συν\,180° \Rightarrow W_T = -T \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2) \Rightarrow W_T = -200 \cdot 17 \Rightarrow W_T = -3400$ J .
Δ₅.
Το έλκηθρο τη χρονική στιγμή $t_3 = 14$ s κινείται στην περιοχή (2) .
Τις χρονικές στιγμές t για τις οποίες
$\Delta t_1 + \Delta t_x \leq t \leq t_{ολ}$ το έλκηθρο κινείται στην περιοχή (2) .
$12 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}$.
Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα $υ_3$ τη χρονική στιγμή t_3 πρέπει να υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα Δt_3 που κινείται το έλκηθρο στην περιοχή (2) .
$\Delta t_3 = t_3 - (\Delta t_1 + \Delta t_x) \Rightarrow \Delta t_3 = 14 - 12 \Rightarrow \Delta t_3 = 2$ s .
Άρα :
$υ_3 = υ_2 - α_2 \cdot \Delta t_3 \Rightarrow υ_3 = 6 - 2 \cdot 2 \Rightarrow υ_3 = 2$ m / s .
Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ελκήθρου τη χρονική στιγμή t_3 :
$(\Delta K / \Delta t)_3 = \Sigma F \cdot υ_3 \Rightarrow (\Delta K / \Delta t)_3 = -T \cdot υ_3 \Rightarrow (\Delta K / \Delta t)_3 = -200 \cdot 2 \Rightarrow (\Delta K / \Delta t)_3 = -400$ J / s .

3) Σφαίρα μάζας m = 2 Kg αφήνεται από ύψος h = 20 m να πέσει προς την επιφάνεια της Γης. Η σφαίρα φτάνει στην επιφάνεια της Γης με ταχύτητα μέτρου $υ_Γ$. Μία ίδια σφαίρα αν αφεθεί από το ίδιο ύψος σε έναν πλανήτη Α θα φτάσει στην επιφάνειά του με ταχύτητα μέτρου $υ_A = υ_Γ / 2$.
Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη είναι $g_Γ = 10$ m / s^2.
Δ₁. Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας $υ_Γ$ και ο χρόνος που απαιτήθηκε για να φτάσει η σφαίρα στην επιφάνεια της Γης ($t_Γ$).
Δ₂. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη Α (g_A).
Δ₃. Αν t_A ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η σφαίρα στην επιφάνεια του πλανήτη Α όταν την αφήνουμε από ύψος h, να βρεθεί ο λόγος $t_A / t_Γ$.
Δ₄. Να γίνουν στο ίδιο διάγραμμα, σε βαθμολογημένους άξονες, οι γραφικές παραστάσεις U = U(y), K = K(y) και E = E(y), όπου U, K, E η δυναμική, κινητική και μηχανική ενέργεια της σφαίρας αντίστοιχα και y η απόσταση της σφαίρας από το έδαφος της Γης.
Λύση
Δ₁.
Κινηματική λύση για τον υπολογισμό του χρόνου και της ταχύτητας
Η σφαίρα αρχικά βρίσκεται στην θέση Ο, εκτελεί ελεύθερη πτώση, από ύψος h.



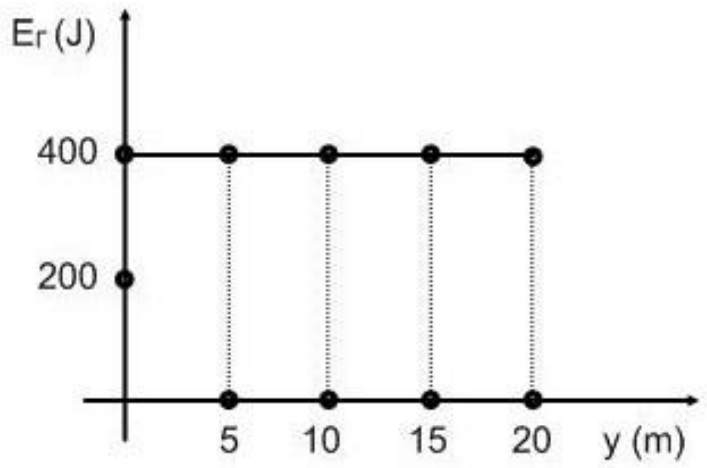
Υπολογίζουμε τον χρόνο πτώσης της σφαίρας στο βαρυτικό πεδίο της Γης:
$h = (1 / 2) \cdot g_Γ \cdot t_Γ^2 \Rightarrow$
$t_Γ^2 = (2 \cdot h) / g_Γ \Rightarrow$
$t_Γ^2 = 20 / 10 \Rightarrow$
$t_Γ = 2$ s.
Η ταχύτητα του σώματος στη θέση Γ:
$υ_Γ = g_Γ \cdot t_Γ \Rightarrow$
$υ_Γ = 10 \cdot 2 \Rightarrow$
$υ_Γ = 20$ m / s.
Ενεργειακές λύσεις (για τον υπολογισμό της ταχύτητας)

Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:
(έκφραση της γενικότερης αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει μόνο σε συστήματα σωμάτων που δρουν διατηρητικές δυνάμεις, όπως το βάρος του σώματος)
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow$
$E_O = E_Γ \Rightarrow$
$K_O + U_{βαρ,O} = K_Γ + U_{βαρ,Γ} \Rightarrow$
$0 + m \cdot g_Γ \cdot h = (1 / 2) \cdot m \cdot υ_Γ^2 + 0 \Rightarrow$
$υ_Γ^2 = 2 \cdot g_Γ \cdot h \Rightarrow$
$υ_Γ^2 = 2 \cdot 10 \cdot 20 \Rightarrow$
και βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.
Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας:
(έκφραση της γενικότερης αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού)
$ΔK = W_{ΣF} \Rightarrow$
$K_{τελ} – K_{αρχ} = W_{w,B\to Γ} \Rightarrow$
$K_Γ – K_O = W_{mg} \Rightarrow$
$(1 / 2) \cdot m \cdot υ_Γ^2 – 0 = m \cdot g_Γ \cdot h \Rightarrow$
$υ_Γ^2 = 2 \cdot g_Γ \cdot h \Rightarrow$
και βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.
$Δ_2$.
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:
(έκφραση της γενικότερης αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει μόνο σε συστήματα σωμάτων που δρουν διατηρητικές δυνάμεις, όπως το βάρος του σώματος)
$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow$
$E_O = E_A \Rightarrow$
$K_O + U_{βαρ,O} = K_A + U_{βαρ,A} \Rightarrow$
$0 + m \cdot g_A \cdot h = (1 / 2) \cdot m \cdot υ_A^2 + 0 \Rightarrow$
$υ_A^2 = 2 \cdot g_A \cdot h$.
Όμοια:
$υ_Γ^2 = 2 \cdot g_Γ \cdot h$.
Διαιρούμε τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη:
$(2 \cdot g_A \cdot h) / (2 \cdot g_Γ \cdot h) = υ_A^2 / υ_Γ^2 \Rightarrow$
$g_A / g_Γ = (υ_A / υ_Γ)^2 \Rightarrow$
$[υ_A = υ_Γ / 2 \Rightarrow$
$υ_A / υ_Γ = (1 / 2)]$
$g_A / g_Γ = 1 / 4 \Rightarrow$
$g_A = g_Γ / 4 \Rightarrow$
$g_A = 10 / 4 \Rightarrow$
$g_A = 2{,}5 \text{ m / s}^2$.
$Δ_3$.
Το σώμα μάζας m πέφτει από το ίδιο ύψος και στους δύο πλανήτες:

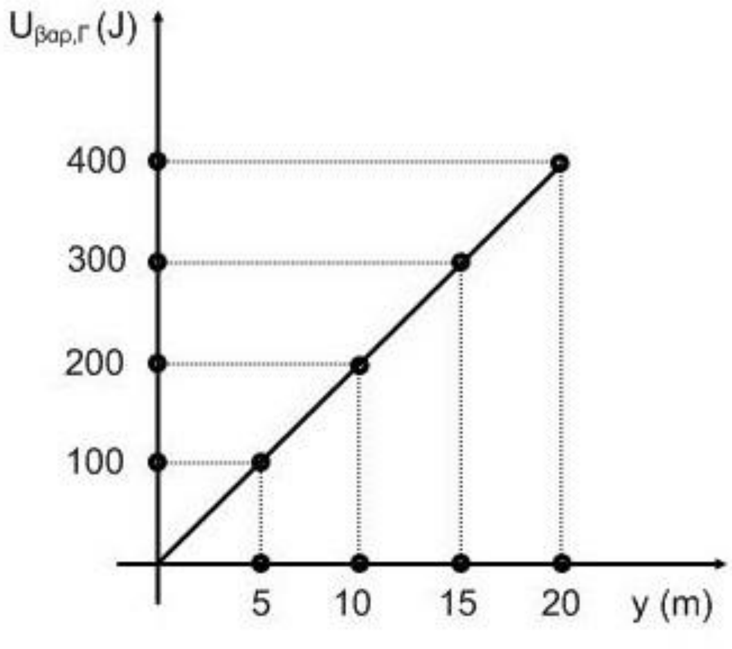


$h = (1 / 2) \cdot g_Γ \cdot t_Γ^2$.

$h = (1 / 2) \cdot g_A \cdot t_A^2$.
Άρα:
$g_A \cdot t_A^2 = g_Γ \cdot t_Γ^2 \Rightarrow$
$2{,}5 \cdot t_A^2 = 10 \cdot t_Γ^2 \Rightarrow$
$(t_A / t_Γ)^2 = 10 / 2{,}5 \Rightarrow$
$t_A / t_Γ = 2$.
$Δ_4$.
Η ολική μηχανική ενέργεια $E_Γ$:
$E_Γ = σταθ = w_Γ \cdot h \Rightarrow$
$E_Γ = m \cdot g_Γ \cdot h \Rightarrow$
$E_Γ = 2 \cdot 10 \cdot 20 \Rightarrow$
$E_Γ = 400$ J.
Το διάγραμμα ολικής ενέργειας E = E (y):



Η δυναμική ενέργεια $U_{βαρ}$:
$U_{βαρ} = w_Γ \cdot y \Rightarrow$
$U_{βαρ} = m \cdot g_Γ \cdot y \Rightarrow$
$U_{βαρ} = 2 \cdot 10 \cdot y$.
$U_{βαρ} = 20 \cdot y$.
Το διάγραμμα βαρυτικής δυναμικής ενέργειας $U_{βαρ} = U_{βαρ}$ (y):



Η μηχανική ενέργεια διατηρείται:
$E_Γ = K + U \Rightarrow$
$K = E_Γ - U \Rightarrow$
$K = m \cdot g_Γ \cdot h - m \cdot g_Γ \cdot y \Rightarrow$
$K = m \cdot g_Γ \cdot (h - y) \Rightarrow$
$K = 2 \cdot 10 \cdot (20 - y) \Rightarrow$

$K = 400 – 20 \cdot y$.

Το διάγραμμα κινητικής ενέργειας K = K (y):