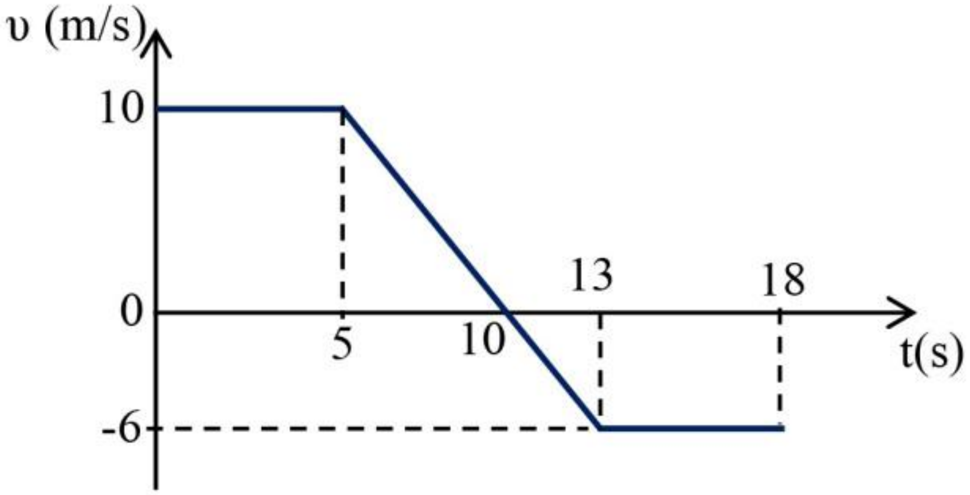
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΘΜΚΕ

1) Σώμα μάζας m = 3 kg κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του άξονα x΄x. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της ταχύτητάς του σε σχέση με το χρόνο.



Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 s το σώμα βρίσκεται στη θέση x_0 = + 5 m.

$Δ_1$. Να υπολογισθεί η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή 10 s.

$Δ_2$. Να γίνει η γραφική παράσταση της τιμής της συνισταμένης δύναμης ΣF που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

$Δ_3$. Να βρεθεί η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή 18 s καθώς και το διάστημα που αυτό διέλυσε στο χρονικό διάστημα 0 s → 18 s.

$Δ_4$. Να υπολογιστεί το έργο της συνισταμένης δύναμης ΣF στο χρονικό διάστημα 5 s → 13 s.

Λύση

Μας δίνεται η μάζα του σώματος m = 3 kg, το διάγραμμα υ – t και ότι το σώμα την χρονική στιγμή t_0 = 0 s το σώμα βρίσκεται στη θέση x_0 = + 5 m.

Στο διάγραμμα υ – t υπάρχει ένα πλήθος στοιχείων:

Από την χρονική στιγμή t_0 = 0 s έως t_1 = 5 s, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή κατά μέτρο και ίση με $υ_1$ = υ = 10 m / s.

Η μετατόπιση του σώματος υπολογίζεται από το εμβαδό του διαγράμματος:

(το πρώτο παραλληλόγραμμο του σχήματος, γενικά το τμήμα της κίνησης που το κινητό εκτελεί στο χρονικό διάστημα που μελετάμε)

$Δx_1$ = εμβαδό Ι = 10·5 = 50 m.

Η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν:

$α_1 = Δυ_1 / Δt = 0$.

Από την χρονική στιγμή t_1 = 5 s έως t_2 = 10 s, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι του μηδενισμού της ταχύτητας του.

Η επιτάχυνση $α_2$ του σώματος είναι σταθερή και η αλγεβρική της τιμή υπολογίζεται από την κλίση του υ – t διαγράμματος:

$α_2$ = κλίση του υ – t διαγράμματος ΙΙ = (0 – 10) / (10 – 5) = – 2 m / s².

(το μέτρο της επιτάχυνσης δίνεται από την κλίση, η αρνητική τιμή οφείλεται στην φορά της επιβράδυνσης που είναι αντίθετη με την φορά κίνησης του κινητού, την φορά της ταχύτητας)

Η ταχύτητα του σώματος μειώνεται κατά μέτρο μέχρι τον μηδενισμό του (το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο).

Η μετατόπιση του σώματος υπολογίζεται από το εμβαδό του διαγράμματος ΙΙ:

(το πρώτο τρίγωνο που συναντάμε στο σχήμα)

$Δx_2$ = εμβαδό ΙΙ = (1 / 2)·(10 – 5)·10 = 25 m.

Από την χρονική στιγμή t_2 = 10 s έως t_3 = 13 s, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Η επιτάχυνση $α_3$ του σώματος είναι σταθερή και το μέτρο της υπολογίζεται από την κλίση του υ – t διαγράμματος:

$α_3$ = κλίση του υ – t διαγράμματος ΙΙΙ = (- 6 – 0) / (13 – 10) = – 2 m / s².

(η αρνητική τιμή οφείλεται στην φορά της επιτάχυνσης που είναι αντίθετη με την αρχική φορά κίνησης του κινητού, το κινητό άλλαξε σε αυτό το χρονικό διάστημα φορά κίνησης)

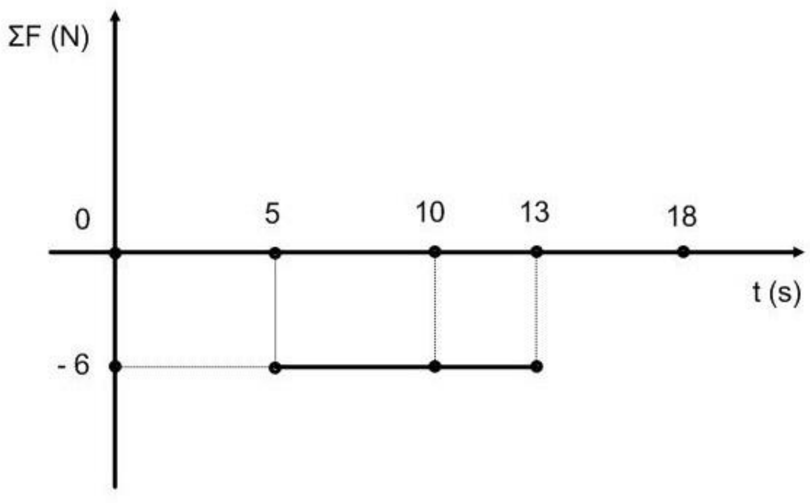
Η ταχύτητα του σώματος αυξάνεται κατά μέτρο.

Η μετατόπιση του σώματος υπολογίζεται από το εμβαδό του διαγράμματος ΙΙΙ:

(το δεύτερο τρίγωνο που συναντάμε στο σχήμα)
Δx_3 = εμβαδό ΙΙΙ = $(1 / 2)\cdot(13 – 10)\cdot(- 6) = – 9$ m.
(Η φορά της μετατόπισης Δx_3 είναι αντίθετη από την αρχική φορά κίνησης, δηλαδή το κινητό έχει ήδη διανύσει Δx_1 και Δx_2 ας υποθέσουμε προς τα δεξιά και σε αυτό το χρονικό διάστημα θα διανύσει Δx_3 προς τα αριστερά)
Από την χρονική στιγμή $t_3 = 13$ s έως $t_4 = 18$ s, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
Η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή κατά μέτρο και ίση με $\upsilon_4 = – 6$ m / s.
Η μετατόπιση του σώματος υπολογίζεται από το εμβαδό του διαγράμματος:
(το δεύτερο παραλληλόγραμμο του σχήματος)
Δx_4 = εμβαδό IV = $(18 – 13)\cdot(- 6) = – 30$ m.
(Η φορά της μετατόπισης Δx_4 είναι αντίθετη από την αρχική φορά κίνησης)
Η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν:
$\alpha_4 = \Delta\upsilon_4 / \Delta t = 0$.

Δ₁.
Η θέση του σώματος την χρονική στιγμή t_2 =10 s:
$\Delta x_2' = x_2 – x_0 \Rightarrow$
$x_2 – x_0 = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow$
$x_2 = 50 + 25 + 5 \Rightarrow$
$x_2 = 80$ m.

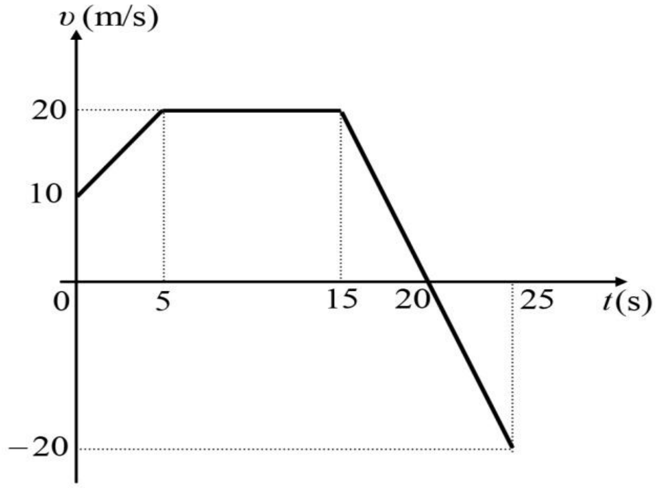
Δ₂.
Υπολογίζουμε την ΣF σε κάθε χρονικό διάστημα της κίνησης:
Από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s έως $t_1 = 5$ s:
$\Sigma F_1 = m\cdot\alpha_1 \Rightarrow$
$\Sigma F_1 = 0$ N.
Από την χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s έως $t_2 = 10$ s:
$\Sigma F_2 = m\cdot\alpha_2 \Rightarrow$
$\Sigma F_2 = 3\cdot(- 2) = – 6$ N.
(το μείον μας δηλώνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει αντίθετη φορά από την φορά κίνησης)
Από την χρονική στιγμή $t_2 = 10$ s έως $t_3 = 13$ s:
$\Sigma F_3 = m\cdot\alpha_3 \Rightarrow$
$\Sigma F_3 = 3\cdot(- 2) = – 6$ N.
(το μείον μας δηλώνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει αντίθετη φορά από την αρχική φορά κίνησης, ίδια με της επιτάχυνσης γιατί το σώμα επιταχύνεται, αυξάνει η ταχύτητα του)
Από την χρονική στιγμή $t_3 = 13$ s έως $t_4 = 18$ s:
$\Sigma F_4 = m\cdot\alpha_4 \Rightarrow$
$\Sigma F_4 = 0$ N.
Το διάγραμμα συνισταμένης δύναμης ΣF – χρόνου t



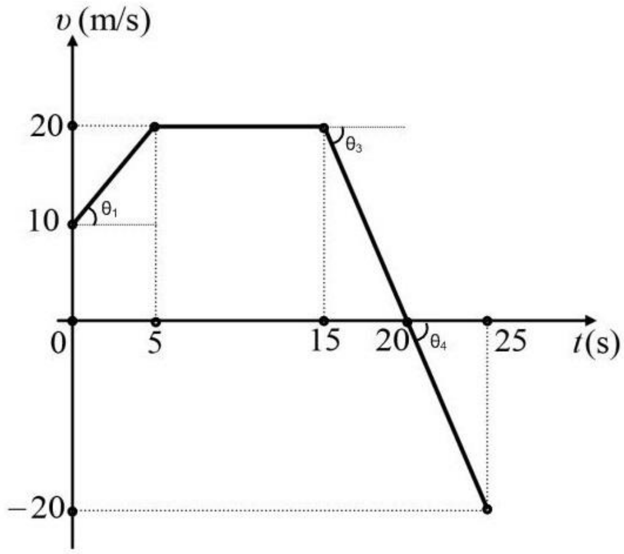
Δ₃.
Η θέση του σώματος την χρονική στιγμή t_4 =18 s:
$\Delta x_4' = x_4 – x_0 \Rightarrow$
$x_4 – x_0 = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 \Rightarrow$
$x_4 = 50 + 25 + (- 9) + (- 30) + 5 \Rightarrow$
$x_4 = 41$ m.

Δ₄.
Το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη ΣF από t_1 = 5 s έως t_3 = 13 s:
$W_{ΣF,1\to3} = W_{ΣF,1\to2} + W_{ΣF,2\to3} \Rightarrow$
$W_{F,1\to3} = ΣF_2 \cdot Δx_2 + ΣF_3 \cdot Δx_3 \Rightarrow$
$W_{F,1\to3} = (-6) \cdot 25 + (-6) \cdot (-9) \Rightarrow$
$W_{F,1\to3} = -150 + 54 = -96$ J.
Το ερώτημα λύνεται με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:
$W_{ΣF} = ΔK \Rightarrow$
$W_{ΣF} = K_3 - K_1 \Rightarrow$
$W_{ΣF} = (1/2) \cdot m \cdot υ_3^2 - (1/2) \cdot m \cdot υ_1^2 \Rightarrow$
$W_{ΣF} = (1/2) \cdot 3 \cdot (-6)^2 - (1/2) \cdot 3 \cdot 10^2 \Rightarrow$
$W_{ΣF} = 54 - 150 \Rightarrow$
$W_{ΣF} = -96$ J.

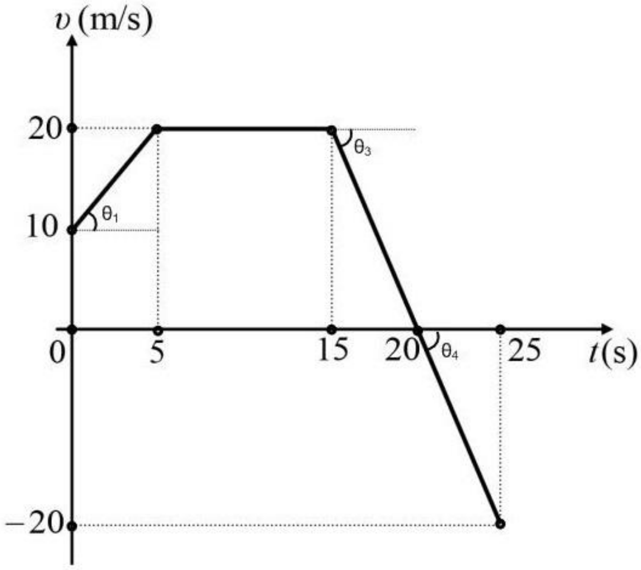
2) Ένα αυτοκίνητο με μάζα 900 kg κινείται σε οριζόντιο ευθύγραμμο δρόμο, που ταυτίζεται με τον άξονα x΄x. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0, το αυτοκίνητο κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, διέρχεται από τη θέση x_0 = + 25 m.



Στο διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη χρονική στιγμή t_0 = 0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 25 s.
Δ₁. Να προσδιορίσετε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αυτοκίνητο επιβραδύνεται.
Δ₂. Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο, από τη χρονική στιγμή t_0 = 0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 = 5 s.
Δ₃. Να προσδιορίσετε τη θέση του αυτοκινήτου τις χρονικές στιγμές t_2 = 15 s και t_4 = 25 s.
Δ₄. Να υπολογίσετε το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο, από τη χρονική στιγμή t_0 = 0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_4 = 25 s.
Λύση
Η μάζα του αυτοκινήτου είναι m = 900 kg και την χρονική στιγμή t_0 = 0, η θέση του αυτοκινήτου είναι x_0 = 25 m.
Από το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου:



Από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s έως την χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
$α_1 = εφ\ θ_1 = (υ_1 – υ_0) / (t_1 – t_0) \Rightarrow$
(η κλίση στο διάγραμμα υ – t, μας δίνει την επιτάχυνση)
$α_1 = (20 – 10) / (5 – 0) \Rightarrow$
$α_1 = 2$ m / s².
Υπολογίζουμε την μετατόπιση $Δx_1$:
$Δx_1$ = εμβαδό στο διάγραμμα υ – t $\Rightarrow$
$Δx_1 = (1 / 2)·(10 + 20)·5 = 75$ m.
Μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε την μετατόπιση $Δx_1$:
$Δx_1 = υ_0·Δt_1 + (1 / 2)·α_1·Δt_1^2 \Rightarrow$
$Δx_1 = υ_0·(t_1 – t_0) + (1 / 2)·α_1·(t_1 – t_0)^2 \Rightarrow$
$Δx_1 = 10·(5 – 0) + (1 / 2)·2·(5 – 0)^2 \Rightarrow$
$Δx_1 = 75$ m.



Από την χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s έως την χρονική στιγμή $t_2 = 15$ s το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
$α_2 = 0$.
Υπολογίζουμε την μετατόπιση $Δx_2$:
$Δx_2$ = εμβαδό στο διάγραμμα υ – t $\Rightarrow$
$Δx_2 = (15 – 5)·2 = 200$ m.
Μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε την μετατόπιση $Δx_2$:
$Δx_2 = υ_1·Δt_1 \Rightarrow$
$Δx_2 = υ_1·(t_2 – t_1) \Rightarrow$
$Δx_2 = 20·(15 – 10) \Rightarrow$
$Δx_1 = 200$ m.
Από την χρονική στιγμή $t_2 = 15$ s έως την χρονική στιγμή $t_3 = 20$ s το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
$α_3 = εφ\ θ_3 = (υ_3 – υ_2) / (t_3 – t_2) \Rightarrow$
(η κλίση στο διάγραμμα υ – t, μας δίνει την επιτάχυνση)
$α_3 = (0 – 20) / (20 – 15) \Rightarrow$
$α_3 = – 4$ m / s².
Υπολογίζουμε την μετατόπιση $Δx_3$:
$Δx_3$ = εμβαδό στο διάγραμμα υ – t $\Rightarrow$
$Δx_3 = (1 / 2)·(20 – 15)·20 = 50$ m.
Μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε την μετατόπιση $Δx_3$:
$Δx_3 = υ_2·Δt_3 – (1 / 2)·α_3·Δt_3^2 \Rightarrow$
$Δx_3 = υ_2·(t_3 – t_2) – (1 / 2)·α_3·(t_3 – t_2)^2 \Rightarrow$
$Δx_3 = 20·(20 – 15) – (1 / 2)·4·(20 – 15)^2 \Rightarrow$
$Δx_3 = 50$ m.
Από την χρονική στιγμή $t_3 = 20$ s έως την χρονική στιγμή $t_4 = 25$ s το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με αντίθετη φορά κίνησης.
$α_4 = εφ\ θ_4 = (υ_4 – υ_3) / (t_4 – t_3) \Rightarrow$
(η κλίση στο διάγραμμα υ – t, μας δίνει την επιτάχυνση)
$α_4 = (20 – 0) / (25 – 20) \Rightarrow$

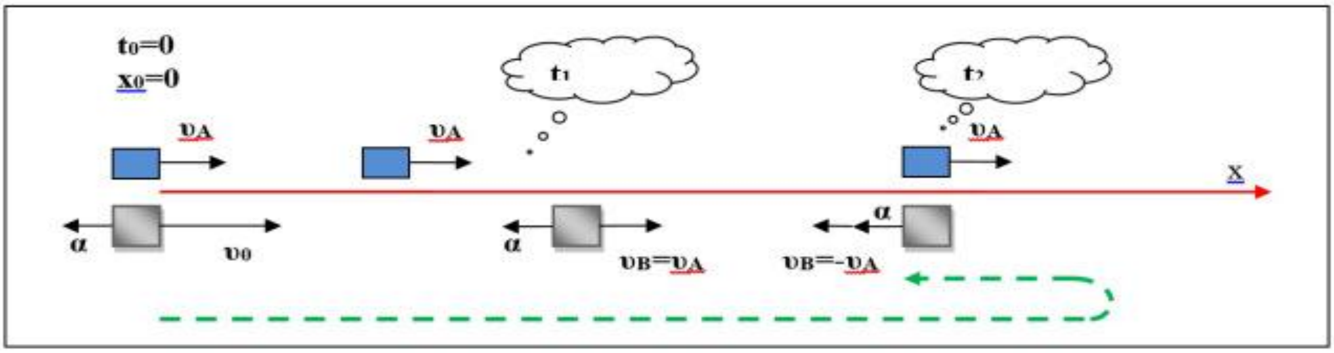
$\alpha_4 = 4\ m / s^2$.
Υπολογίζουμε την μετατόπιση Δx_4:
Δx_4 = εμβαδό στο διάγραμμα υ – t ⇒
$\Delta x_4 = (1 / 2)\cdot(25 - 20)\cdot 20 = 50$ m.
Μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε την μετατόπιση Δx_4:
$\Delta x_4 = \upsilon_3\cdot\Delta t_4 + (1 / 2)\cdot\alpha_4\cdot\Delta t_4^2 \Rightarrow$
$\Delta x_4 = \upsilon_3\cdot(t_4 - t_3) + (1 / 2)\cdot\alpha_4\cdot(t_4 - t_3)^2 \Rightarrow$
$\Delta x_4 = 0 + (1 / 2)\cdot 4\cdot(25 - 20)^2 \Rightarrow$
$\Delta x_4 = 50$ m (κίνηση προς τα αριστερά).
Δ_1.
Η κίνηση του αυτοκινήτου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη από την χρονική στιγμή $t_2 = 15$ s έως $t_2 = 15$ s.
Δ_2.
Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Νεύτωνα, στο χρονικό διάστημα Δt_1:
$\Sigma F_1 = m\cdot\alpha_1 \Rightarrow$
$\Sigma F_1 = 900\cdot 2 \Rightarrow$
$\Sigma F_1 = 1800$ N.
Δ_3.
Ισχύει:
$\Delta x_1 = x_1 - x_0 \Rightarrow$
$x_1 = \Delta x_1 + x_0 \Rightarrow$
$x_1 = 75 + 25 = 100$ m.
Ισχύει:
$\Delta x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow$
$x_2 = \Delta x_2 + x_1 \Rightarrow$
$x_2 = 200 + 100 = 300$ m.
Ισχύει:
$\Delta x_3 = x_3 - x_2 \Rightarrow$
$x_3 = \Delta x_3 + x_2 \Rightarrow$
$x_3 = 50 + 300 = 350$ m.
Ισχύει:
$\Delta x_4 = x_4 - x_3 \Rightarrow$
$x_4 = \Delta x_4 + x_3 \Rightarrow$
$x_3 = - 50 + 350 = 300$ m.
Δ_4.
Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Νεύτωνα, στο χρονικό διάστημα Δt_2:
$\Sigma F_2 = m\cdot\alpha_2 \Rightarrow$
$\Sigma F_2 = 0$.
Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Νεύτωνα, στο χρονικό διάστημα Δt_3:
$\Sigma F_3 = m\cdot\alpha_3 \Rightarrow$
$\Sigma F_3 = 900\cdot(- 4) \Rightarrow$
$\Sigma F_3 = - 3600$ N.
Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Νεύτωνα, στο χρονικό διάστημα Δt_4:
$\Sigma F_4 = m\cdot\alpha_4 \Rightarrow$
$\Sigma F_4 = 900\cdot 4 \Rightarrow$
$\Sigma F_4 = 3600$ N.
Το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_4 = 25$ s:
$W_{F,o\lambda} = W_{F,1} + W_{F,2} + W_{F,3} + W_{F,4} \Rightarrow$
$W_{F,o\lambda} = + F_1\cdot\Delta x_1 + 0 - F_3\cdot\Delta x_3 + F_4\cdot\Delta x_4 \Rightarrow$
$W_{F,o\lambda} = + 1800\cdot 75 - 3600\cdot 50 + 3600\cdot 50 \Rightarrow$
$W_{F,o\lambda} = + 135000$ J.
2η λύση
Με Θ.Μ.Κ.Ε.:
$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F,o\lambda}$

3) Δύο κιβώτια Α και Β με μάζες m_A = 5 kg και m_B = 10 kg, κινούνται παράλληλα με έναν οριζόντιο προσανατολισμένο άξονα Οx. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 s τα κιβώτια διέρχονται από τη θέση x_0 = 0 m, κινούμενα και τα δύο προς τη θετική φορά. Το κιβώτιο Α κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $υ_A$ = 10 m / s, ενώ το κιβώτιο Β έχει ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 30 m / s, και κινείται με σταθερή επιτάχυνση η οποία έχει μέτρο $α_B$ = 2 m/s^2 και φορά αντίθετη της ταχύτητας . Να υπολογίσετε:
$Δ_1$. το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται σε κάθε κιβώτιο ,
$Δ_2$. τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα κιβώτια Α και Β θα βρεθούν πάλι το ένα δίπλα στο άλλο μετά τη χρονική στιγμή t_0 ,
$Δ_3$. τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες τα μέτρα των ταχυτήτων των δυο κιβωτίων θα είναι ίσα ,
$Δ_4$. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε κιβωτίου από τη χρονική στιγμή t_0 = 0 s, μέχρι τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα μέτρα των ταχυτήτων τους θα είναι ίσα για πρώτη φορά .

Λύση

$Δ_1$.
Το κιβώτιο (Α) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, οπότε ισχύει ο 1^{ος} Νόμος του Νεύτωνα :
$ΣF_A = 0$.
Το κιβώτιο (Β) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση,
οπότε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης σύμφωνα με το τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής :
$|ΣF_B| = m_B \cdot α_B \Leftrightarrow |ΣF_B| = 20$ N.

$Δ_2$.
Για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση που εκτελεί το κιβώτιο (Α) έχουμε :
$υ_A = Δx / Δt \Rightarrow υ_A = (x_A - x_{0,A}) / (t - 0) \Rightarrow$
$υ_A = x_A / t \Rightarrow x_A = υ_A \cdot t \Rightarrow x_A = 10 \cdot t$ … (1) .
Αντίστοιχα για την ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση που εκτελεί το κιβώτιο (Β) εφαρμόζουμε την εξίσωση της κίνησης και προσέχουμε τις αλγεβρικές τιμές των μεγεθών :
$Δx_B = υ_0 \cdot Δt + ½ \cdot α_B \cdot Δt^2 \Rightarrow x_B - x_{B,0} = 30 \cdot t + ½ \cdot (-2) \cdot t^2 \Rightarrow$
$x_B = 30 \cdot t - t^2$ … (2) .
Όταν συναντηθούν θα βρίσκονται στην ίδια θέση, οπότε από τις (1) και (2) έχουμε :
$x_A = x_B \Rightarrow 10 \cdot t = 30 \cdot t - t^2 \Rightarrow$
$t^2 - 20 \cdot t = 0 \Rightarrow t \cdot (t - 20) = 0$.
Οπότε προκύπτει : t = 0 (αρχικό σημείο Ο) και t = 20 s .



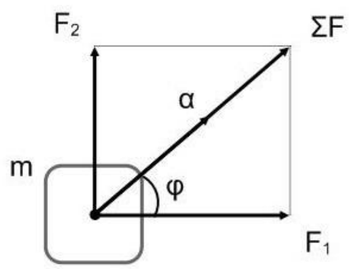
$Δ_3$.
Για το κιβώτιο (Β) θα ισχύει :
$α_B = Δυ / Δt \Rightarrow -2 = (υ_B - υ_0) / (t - 0) \Rightarrow$
$υ_B - υ_0 = -2 \cdot t \Rightarrow υ_B - 30 = -2 \cdot t \Rightarrow υ_B = 30 - 2 \cdot t$ … (3) .
Θέλουμε $|υ_B| = υ_A \Leftrightarrow$
$υ_B = υ_A \Rightarrow 30 - 2 \cdot t_1 = 10 \Rightarrow 2 \cdot t_1 = 20 \Rightarrow t_1 = 10$ s ,
ή
$υ_B = -υ_A \Rightarrow 30 - 2 \cdot t_2 = -10 \Rightarrow 2 \cdot t_2 = 40 \Rightarrow t_2 = 20$ s .
Παρατήρηση: Τα δύο κιβώτια έχουν ίσες ταχύτητες την t_1 = 10 s και αντίθετες ταχύτητες την t_2 = 20 s.
Προφανώς, το κιβώτιο (Β) κατά τη διάρκεια της ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης που εκτελεί μηδενίζεται η ταχύτητά του (στιγμιαία) και στη συνέχεια κινείται αντίθετα, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
Δείτε το παραπάνω σχήμα.

$Δ_4$.
Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για κάθε κιβώτιο ξεχωριστά από την t = 0 έως την t = 10 s :
(Α) :
$ΔK_A = W_{ΣF(A)} \Rightarrow ΔK_A = 0$, αφού $ΣF_{(A)} = 0$.
(Β) :
$ΔK_B = ½ \cdot m \cdot υ_B^2 - ½ \cdot m \cdot υ_0^2$
και με αντικατάσταση προκύπτει $ΔK_B = -4000$ J .

4) Σώμα μάζας 5 kg βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή t = 0 s στο σώμα ασκούνται δυο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις F_1 και F_2, οι διευθύνσεις των οποίων είναι κάθετες μεταξύ τους, και τα μέτρα τους συνδέονται με τη σχέση $F_1 = (3 / 4)\cdot F_2$.
Το σώμα αρχίζει να κινείται πάνω στο οριζόντιο δάπεδο, κατά τη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης και τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s, το μέτρο της ταχύτητας του ισούται με 8 m/s.
Να υπολογίσετε:
$Δ_1$. το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων F_1 και F_2,
$Δ_2$. τα μέτρα των δυνάμεων F_1 και F_2,
$Δ_3$. την κινητική ενέργεια του σώματος, τη χρονική στιγμή που η μετατόπιση του είναι Δx = 4 m, από το σημείο που ξεκίνησε,
$Δ_4$. το έργο της δύναμης F_1 από τη χρονική στιγμή t = 0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.

Λύση

$Δ_1$.
Με την επίδραση των δύο οριζόντιων και κάθετων μεταξύ τους δυνάμεων F_1 και F_2 το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση στην διεύθυνση της ΣF, με μέτρο:
$α = Δυ / Δt \Rightarrow$
$α = (υ_1 – υ_0) / (t_1 – t_0) \Rightarrow$
$α = (8 – 0) / (4 – 0) \Rightarrow$
$α = 2\ m / s^2$.
Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης ΣF υπολογίζεται από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα:
$ΣF = m\cdot α \Rightarrow$
$ΣF = 5\cdot 2 = 10$ N.



Η διεύθυνση της ΣF:
$εφ\ φ = F_2 / F_1$
και επειδή $F_1 = (3 / 4)\cdot F_2$,
$εφ\ φ = F_2 / [(3 / 4)\cdot F_2] \Rightarrow$
$εφ\ φ = 4 / 3$,
όπου φ είναι η γωνία μεταξύ της ΣF και της F_1.

$Δ_2$.
Επειδή οι δυνάμεις F_1 και F_2 είναι κάθετες μεταξύ τους για το μέτρο της ΣF ισχύει:
$ΣF = \sqrt{(F_2^2 + F_1^2)} \Rightarrow$
$ΣF^2 = F_2^2 + F_1^2$
$ΣF^2 = F_2^2 + [(3 / 4)\cdot F_2]^2 \Rightarrow$
$ΣF^2 = (25 / 16)\cdot F_2^2 \Rightarrow$
$ΣF = (5 / 4)\cdot F_2 \Rightarrow$
$F_2 = (4 / 5)\cdot ΣF \Rightarrow$
$F_2 = (4 / 5)\cdot 10 \Rightarrow$
$F_2 = 8$ N
και
$F_1 = (3 / 4)\cdot F_2 \Rightarrow$
$F_1 = (3 / 4)\cdot 8 \Rightarrow$
$F_1 = 6$ N.

$Δ_3$.
Για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας όταν το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά Δx = 4 m,
εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής ενέργειας:
(για το σώμα m με αρχική την θέση ακινησίας και τελική την θέση x = 4 m)
$ΔK = W_{ΣF} \Rightarrow$
$K – K_0 = ΣF\cdot Δx\cdot συν\ 0° \Rightarrow$
$K = ΣF\cdot Δx \Rightarrow$
$K = 10\cdot 4 \Rightarrow$

$K = 40$ J.

Κινηματική λύση

Το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση,
το μέτρο της ταχύτητας του σε σχέση με τον χρόνο:

$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t \Rightarrow$

(όπου $\upsilon_0 = 0$ m / s),

$\upsilon = 0 + \alpha \cdot t \Rightarrow$

$t = \upsilon / \alpha$.

Η μετατόπιση που έχει διανύσει το κινητό είναι:

$\Delta x = \upsilon_0 \cdot t + (1 / 2) \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow$

$\Delta x = (1 / 2) \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow$

$(t = \upsilon / \alpha)$,

$\Delta x = (1 / 2) \cdot \alpha \cdot (\upsilon / \alpha)^2 \Rightarrow$

$\Delta x = \upsilon^2 / (2 \cdot \alpha) \Rightarrow$

$\upsilon^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \Delta x$.

Η κινητική ενέργεια του σώματος:

$K = (1/ 2) \cdot m \cdot \upsilon^2 \Rightarrow$

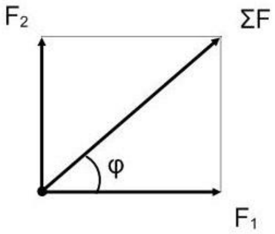
$K = (1/ 2) \cdot m \cdot (2 \cdot \alpha \cdot \Delta x) \Rightarrow$

$K = \Sigma F \cdot \Delta x \Rightarrow$

$K = 40$ J.

Δ_4.

Υπολογισμός του έργου $W_{F,1}$ από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 4$ s.



Από το παραπάνω σχήμα:

$\text{συν}\ \phi = F_1 / \Sigma F \Rightarrow$

$\text{συν}\ \phi = 6 / 10 = 3 / 5$.

$\text{ημ}\ \phi = F_2 / \Sigma F \Rightarrow$

$\text{ημ}\ \phi = 8 / 10 = 4 / 5$.

Υπολογίζουμε την μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα 0 s → 4 s:

$\Delta x_1 = \upsilon_1 \cdot \Delta t_1^2 + (1 / 2) \cdot \alpha \cdot \Delta t_1^2 \Rightarrow$

$\Delta x_1 = (1 / 2) \cdot \alpha \cdot \Delta t_1^2 \Rightarrow$

$\Delta x_1 = (1 / 2) \cdot 2 \cdot 4^2 \Rightarrow$

$\Delta x_1 = 16$ m.

Για το έργο $W_{F,1}$ της F_1:

$W_{F,1} = F_1 \cdot \Delta x_1 \cdot \text{συν}\ \phi \Rightarrow$

$W_{F,1} = 6 \cdot 16 \cdot (3 / 5) \Rightarrow$

$W_{F,1} = 57{,}6$ J.

(Προσθήκη) Υπολογισμός του έργου $W_{F,2}$ της F_2:

$W_{F,2} = F_2 \cdot \Delta x_1 \cdot \text{συν}\ (90° – \phi) \Rightarrow$

$W_{F,2} = 8 \cdot 16 \cdot (4 / 5) \Rightarrow$

$W_{F,2} = 102{,}4$ J.

(Προσθήκη) Υπολογισμός του έργου $W_{\Sigma F}$ της ΣF:

$W_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot \Delta x_1 \cdot \text{συν}\ 0° \Rightarrow$

$W_{\Sigma F} = 10 \cdot 16 \cdot 1 \Rightarrow$

$W_{\Sigma F} = 160$ J.

Ισχύει:

$W_{F,1} + W_{F,2} = 57{,}6 + 102{,}4 = 160$ J.

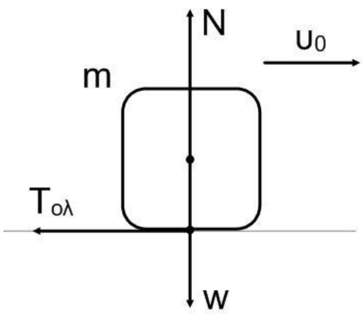
Άρα:

$W_{\Sigma F} = W_{F,1} + W_{F,2}$.

5) Η τροχαία σε μια προσπάθεια πρόληψης των ατυχημάτων διοργανώνει μαθήματα για νέους οδηγούς και προτείνει την παρακάτω άσκηση φυσικής:
Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύγραμμο οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα $υ_0$ = 72 Km / h. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 s ο οδηγός φρενάρει, οι τροχοί μπλοκάρουν με αποτέλεσμα το αυτοκίνητο να επιβραδύνεται.
Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ οδοστρώματος και ελαστικών του αυτοκινήτου είναι μ = 0,8 , το αυτοκίνητο έχει μάζα m = 1000 Kg, η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ m / s^2$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα .
$Δ_1$. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο αυτοκίνητο και να υπολογίσετε το μέτρο της επιβράδυνσης του αυτοκινήτου.
$Δ_2$. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η ταχύτητα του αυτοκινήτου γίνεται $υ_0 / 5$.
$Δ_3$. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_2 που σταματά το αυτοκίνητο.
$Δ_4$. Να βρεθεί το ποσό της κινητικής ενέργειας του αυτοκινήτου που μετατρέπεται σε θερμική κατά το χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή t_0 = 0 s έως τη χρονική στιγμή t_1 .

Λύση

$Δ_1$.

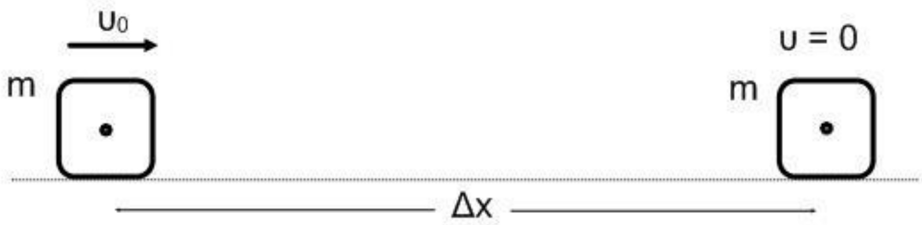


Η αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου δίνεται :
$υ_0 = 72\ Km / h \Rightarrow υ_0 = 72·1000 / (60·60) \Rightarrow υ_0 = 20\ m / s$.
Το αυτοκίνητο ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα :
$ΣF_y = 0 \Rightarrow N – w = 0 \Rightarrow N = w \Rightarrow N = m·g \Rightarrow N = 1000·10 \Rightarrow N = 10.000\ N$.
Η τριβή ολίσθησης δίνεται :
$T_{ολ} = μ·N \Rightarrow T_{ολ} = 0,8·10.000 \Rightarrow T_{ολ} = 8000\ N$.
2ος νόμος του Newton στο αυτοκίνητο :
$ΣF_x = m·α \Rightarrow T_{ολ} = m·α \Rightarrow α = T_{ολ} / m \Rightarrow α = 8000 / 1000 \Rightarrow α = 8\ m / s^2$.
Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, με την επίδραση της τριβής ολίσθησης $T_{ολ}$.

$Δ_2$.

Η εξίσωση της ταχύτητας υ και του χρόνου t στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση είναι :
$υ = υ_0 – α·t$,
(μας δίνεται την χρονική στιγμή $t = t_1$ το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου $υ_1 = υ_0 / 5$.)
$υ_1 = υ_0 – α·t_1 \Rightarrow υ_0 / 5 = υ_0 – α·t_1 \Rightarrow α·t_1 = υ_0 – (υ_0 / 5) \Rightarrow α·t_1 = 4·υ_0 / 5 \Rightarrow t_1 = 4·υ_0 / (5·α) \Rightarrow t_1 = 4·20 / (5·8) \Rightarrow t_1 = 2\ s$.

$Δ_3$.



Το αυτοκίνητο τελικά σταματάει την χρονική στιγμή $t = t_2$ άρα η ταχύτητα του είναι μηδέν $υ_2 = 0$.
Η εξίσωση της ταχύτητας υ και του χρόνου t στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση :
$υ_2 = υ_0 – α·t_2 \Rightarrow 0 = υ_0 – α·t_2 \Rightarrow υ_0 = α·t_2 \Rightarrow t_2 = υ_0 / α \Rightarrow t_2 = 20 / 8 \Rightarrow t_2 = 2,5\ s$.

$Δ_4$.

1ος τρόπος : Αρχή διατήρησης της ενέργειας :
(η γενικότερη μορφή, ισχύει πάντα, όπου K_0 η αρχική κινητική ενέργεια για $t_0 = 0$ και K_1 η κινητική ενέργεια την χρονική στιγμή $t = t_1$, Q είναι η θερμότητα που παράγεται λόγω του έργου της τριβής ολίσθησης W_T)
$K_0 = K_1 + Q \Rightarrow Q = K_0 – K_1 \Rightarrow Q = ½·m·υ_0^2 – ½·m·υ_1^2 \Rightarrow Q = ½·m·(υ_0^2 – υ_1^2) \Rightarrow Q = ½·m·(υ_0^2 – (υ_0 / 5)^2) \Rightarrow Q = ½·m·(24·υ_0^2 / 25) \Rightarrow Q = ½·1000·(24·400 / 25) \Rightarrow Q = 192000$ joule .
2ος τρόπος : Θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας :
(άλλη έκφραση της γενικότερης αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει πάντα)

$\Delta K = W_T \Rightarrow K_1 - K_0 = W_T \Rightarrow W_T = ½\cdot m\cdot υ_1^2 - ½\cdot m\cdot υ_0^2 \Rightarrow W_T = ½\cdot m\cdot(υ_1^2 - υ_0^2) \Rightarrow W_T = ½\cdot m\cdot((υ_0 / 5)^2 - υ_0) \Rightarrow W_T = ½\cdot m\cdot(- 24\cdot υ_0^2 / 25) \Rightarrow W_T = - 192000$ joule .
Το μείον είναι αναμενόμενο, γιατί το έργο της τριβής ολίσθησης W_T είναι πάντα αρνητικό , αφού η τριβή ολίσθησης έχει πάντα αντίθετη φορά από την φορά κίνησης του σώματος .

6) Σε αμαξίδιο μάζας M = 2,5 kg έχουμε προσαρτήσει αισθητήρα ταχύτητας μάζας m = 0,5 kg. Ο αισθητήρας καταγράφει την ταχύτητα του αμαξιδίου κάθε ένα δευτερόλεπτο για εννέα φορές από τη στιγμή της ενεργοποίησης του. Το αμαξίδιο κινείται σε ευθύγραμμο οριζόντιο διάδρομο. Το δάπεδο του διαδρόμου είναι λείο εκτός του τμήματος μεταξύ των σημείων Β και Γ που εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης (μ) με το αμαξίδιο.

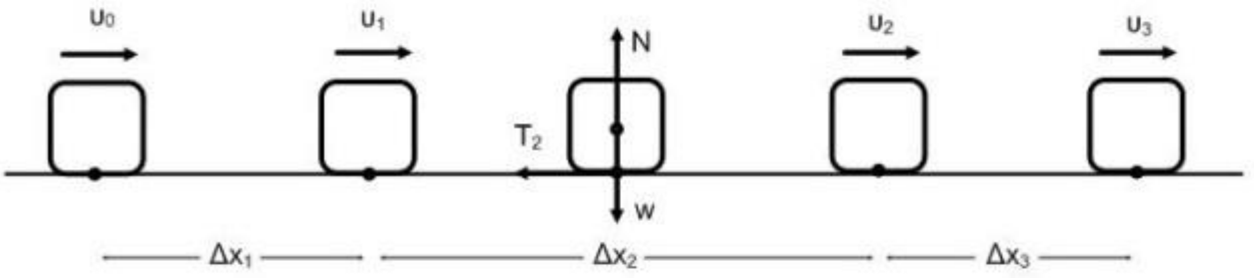
Τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο Α ενεργοποιείται ο αισθητήρας και αρχίζει την καταγραφή. Οι τιμές που κατέγραψε ο αισθητήρας δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Μέτρηση Αισθητήρα	Ταχύτητα που κατέγραψε σε *m/s*
Πρώτη	14
Δεύτερη	14
Τρίτη	14
Τέταρτη	11
Πέμπτη	8
Έκτη	5
Έβδομη	2
Όγδοη	2
Ένατη	2

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\ m / s^2$ και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.
Να υπολογίσετε
$Δ_1$. Την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης του αμαξιδίου στη διαδρομή ΒΓ, αν γνωρίζετε ότι ό αισθητήρας έδωσε ενδείξεις τις χρονικές στιγμές που το αμαξίδιο διέρχονταν από τα σημεία Β και Γ
$Δ_2$. Τη δύναμη της τριβής που ασκείται στο αμαξίδιο από το δάπεδο καθώς και το συντελεστή τριβής ολίσθησης.
$Δ_3$. Το μήκος του ΑΒ, του ΒΓ και του διαστήματος που διάνυσε το κινητό από το Γ έως το σημείο Δ που σταματά να καταγράφει τιμές ο αισθητήρας.
$Δ_4$. Το ποσοστό (%) της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική (με προσέγγιση ακεραίου) κατά τη κίνηση του αμαξιδίου από το Α στο Δ.
Λύση
Το ενδιαφέρον στοιχείο της άσκησης είναι το πλήθος των μετρήσεων που θα μπορούσαν να είναι πειραματικά δεδομένα που παράγονται από ένα fysics experiment simulation (εικονικό πείραμα).
Το κινητό (αμαξίδιο) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά την ΑΒ μετατόπιση του, ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση κατά την ΒΓ μετατόπιση του, έστω ότι συνάντησε ανώμαλο έδαφος το αμαξίδιο και ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά την ΓΔ μετατόπιση του.
$Δ_1$.
Το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση κατά την ΒΓ μετατόπιση του.
Εξίσωση της ταχύτητας:
$υ_2 = υ_1 - α_2\cdot Δt_2 \Rightarrow$
(Από τις τιμές του πίνακα: $υ_1 = υ_0 = 14\ m / s$, $υ_2 = 2\ m / s$)
$2 = 14 - α_2\cdot(t_2 - t_1) \Rightarrow$
$α_2 = (14 - 2) / (6 - 2) \Rightarrow$
$α_2 = 3\ m / s^2$.
Ή απλούστερα:
$α_2 = Δυ_2 / Δt_2 \Rightarrow$
$α_2 = (υ_2 - υ_1) / (t_2 - t_1) \Rightarrow$
$α_2 = (2 - 14) / (6 - 2) \Rightarrow$

$\alpha_2 = -3\ m / s^2$.

Δ₂.



2ος νόμος του Νεύτωνα:

$\Sigma F_{x,2} = (m + M)\cdot\alpha_2 \Rightarrow$

$-T_2 = (m + M)\cdot\alpha_2 \Rightarrow$

$T_2 = -(0{,}5 + 2{,}5)\cdot 3 \Rightarrow$

$T_2 = -9\ N$.

Το κινητό ισορροπεί στον y άξονα:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$N - w = 0 \Rightarrow$

$N = w \Rightarrow$

$N = (m + M)\cdot g$.

Η τριβή ολίσθησης T_2:

$T_2 = \mu\cdot N \Rightarrow$

$T_2 = \mu\cdot(m + M)\cdot g \Rightarrow$

$\mu = T_2 / [(m + M)\cdot g] \Rightarrow$

$\mu = 9 / [(0{,}5 + 2{,}5)\cdot 10] \Rightarrow$

$\mu = 0{,}3$.

Δ₃.

Το κινητό (αμαξίδιο) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά την ΑΒ μετατόπιση του.

Εξίσωση της ταχύτητας υ_1:

(Η ταχύτητα του κινητού μένει σταθερή κατά μέτρο διεύθυνση και φορά)

$\upsilon_1 = \upsilon_0 = 14\ m / s$.

Εξίσωση της μετατόπισης Δx_1:

$\Delta x_1 = \upsilon_1\cdot\Delta t_1 \Rightarrow$

$\Delta x_1 = \upsilon_1\cdot(t_1 - t_0) \Rightarrow$

$\Delta x_1 = 14\cdot(2 - 0) \Rightarrow$

$\Delta x_1 = 28\ m$.

(Η΄ από τον ορισμό της ταχύτητας $\upsilon_1 = \Delta x_1 / \Delta t_1$)

Το κινητό (αμαξίδιο) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση κατά την ΒΓ μετατόπιση του.

$\Delta x_2 = \upsilon_1\cdot\Delta t_2 - (1 / 2)\cdot\alpha_2\cdot\Delta t_2^2 \Rightarrow$

$\Delta x_2 = 14\cdot(6 - 2) - (1 / 2)\cdot 3\cdot(6 - 2)^2 \Rightarrow$

$\Delta x_2 = 32\ m$.

Το κινητό (αμαξίδιο) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά την ΓΔ μετατόπιση του.

Εξίσωση της ταχύτητας υ_3:

(Η ταχύτητα του κινητού μένει σταθερή κατά μέτρο διεύθυνση και φορά)

$\upsilon_3 = \upsilon_2 = 2\ m / s$.

Εξίσωση της μετατόπισης Δx_3:

$\Delta x_3 = \upsilon_3\cdot\Delta t_3 \Rightarrow$

$\Delta x_3 = \upsilon_3\cdot(t_3 - t_2) \Rightarrow$

$\Delta x_3 = 2\cdot(8 - 6) \Rightarrow$

$\Delta x_3 = 4\ m$.

(Η΄ από τον ορισμό της ταχύτητας $\upsilon_3 = \Delta x_3 / \Delta t_3$)

Δ₄.

Η αρχική κινητική ενέργεια του αμαξιδίου:

$K_{αρχ} = K_1 = (1 / 2)\cdot(m + M)\cdot\upsilon_1^2 \Rightarrow$

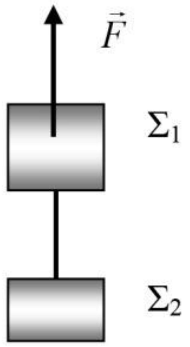
$K_{αρχ} = (1 / 2)\cdot(0{,}5 + 2{,}5)\cdot 14^2 \Rightarrow$

$K_{αρχ} = 294\ J$.

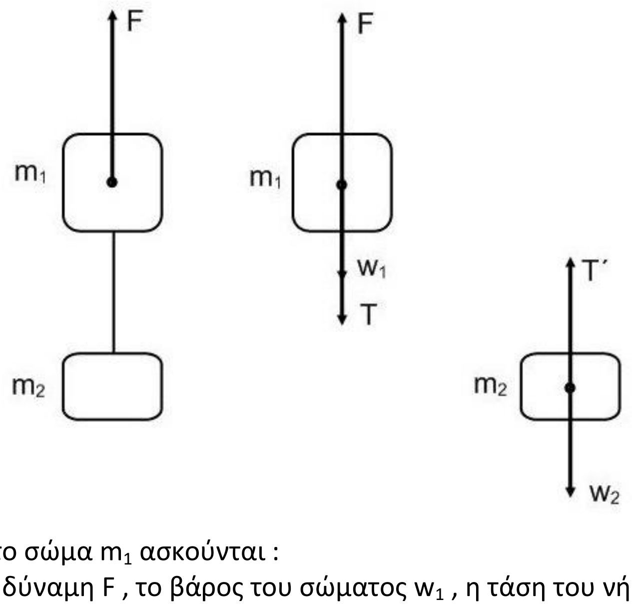
Το κινητό (αμαξίδιο) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση κατά την ΒΓ μετατόπιση του.

Ισχύει η γενικότερη αρχή διατήρησης της ενέργειας:
(Ισχύει σε όλο το σύμπαν)
$K_{αρχ} = Q + K_{τελ} \Rightarrow$
$[K_{τελ} = K_2 = (1 / 2)\cdot(m + M)\cdot υ_2^2 \Rightarrow$
$K_{τελ} = (1 / 2)\cdot(0{,}5 + 2{,}5)\cdot 2^2 = 6$ J.]
$Q = K_{αρχ} – K_{τελ} \Rightarrow$
$Q = 294 – 6 = 288$ J.
Το ποσοστό (%) της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική (με προσέγγιση ακεραίου) κατά τη κίνηση του αμαξιδίου από το Α στο Δ:
(Η κινητική ενέργεια $K_{τελ} = K_2 = K_3$)
$(Q / K_{αρχ})\ \% = (Q / K_{αρχ})\cdot 100\ \% \Rightarrow$
$(Q / K_{αρχ})\ \% = (288 / 294)\cdot 100\ \% \Rightarrow$
$(Q / K_{αρχ})\ \% = 0{,}979\cdot 100\ \% \Rightarrow$
$(Q / K_{αρχ})\ \% = 97{,}9\ \%$.

7) Τα σώματα του σχήματος $Σ_1$ και $Σ_2$ έχουν μάζες $m_1 = 4$ Kg και $m_2 = 2$ Kg αντίστοιχα και συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα. Στο $Σ_1$ ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη F με μέτρο 90 N και το σύστημα των δυο σωμάτων, την χρονική στιγμή t = 0 s, αρχίζει να ανεβαίνει κατακόρυφα, με το νήμα τεντωμένο.



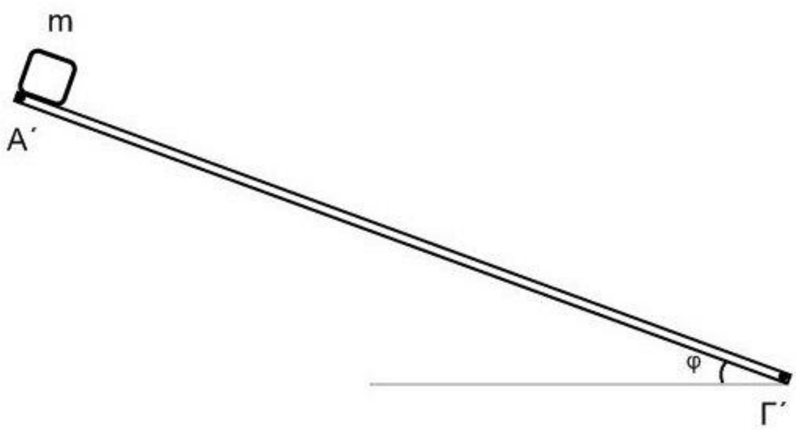
Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $g = 10$ m / s^2 και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.
Δ₁. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα και να εφαρμόσετε για το καθένα το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής.
Δ₂. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση των σωμάτων.
Δ₃. Να υπολογίσετε το συνολικό έργο των βαρών των σωμάτων όταν αυτά έχουν ανυψωθεί κατά h = 10 m πάνω από την αρχική τους θέση.
Δ₄. Να υπολογίσετε τη συνολική κινητική ενέργεια των σωμάτων όταν αυτά έχουν ανυψωθεί κατά h =10 m πάνω από την αρχική τους θέση.
Λύση
Δ₁.



Στο σώμα m_1 ασκούνται :
Η δύναμη F , το βάρος του σώματος w_1 , η τάση του νήματος T .
Στο σώμα m_2 ασκούνται :
Το βάρος του σώματος w_2 , η τάση του νήματος T΄ .
2ος νόμος του Newton στο σώμα μάζας m_1 :

$\Sigma F_{y,1} = m_1 \cdot \alpha \Rightarrow F - T - w_1 = m_1 \cdot \alpha$ … (I) .
2ος νόμος του Newton στο σώμα μάζας m_2 :
$\Sigma F_{y,2} = m_2 \cdot \alpha \Rightarrow T' - w_2 = m_2 \cdot \alpha$ … (II) .
Δ_2.
Από την σχέση (II) :
$T' = m_2 \cdot \alpha + m_2 \cdot g$ … (III) .
Από την σχέση (I) :
$T = F - m_1 \cdot g - m_1 \cdot \alpha$ … (IV) .
Οι δυνάμεις Τ και Τ΄ είναι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης άρα $T = T'$.
Από την σχέση (III) και την σχέση (IV) :
$m_2 \cdot \alpha + m_2 \cdot g = F - m_1 \cdot g - m_1 \cdot \alpha \Rightarrow m_2 \cdot \alpha + m_1 \cdot \alpha = F - m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \Rightarrow (m_2 + m_1) \cdot \alpha = F - (m_1 - m_2) \cdot g \Rightarrow \alpha = [F - (m_1 - m_2) \cdot g] / (m_2 + m_1) \Rightarrow \alpha = [90 - (4 - 2) \cdot 10] / (2 + 4) \Rightarrow \alpha = 30 / 6 \Rightarrow \alpha = 5 \text{ m} / \text{s}^2$.
Δ_3.
Το έργο του βάρους w_1 του σώματος m_1 :
(το σώμα m_1 ανεβαίνει, το βάρος w_1 έχει αντίθετη φορά από την φορά κίνησης)
$W_{w,1} = - w_1 \cdot h \Rightarrow W_{w,1} = - m_1 \cdot g \cdot h \Rightarrow W_{w,1} = - 4 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow W_{w,1} = - 400$ joule .
Το έργο του βάρους w_2 του σώματος m_2 :
(το σώμα m_2 ανεβαίνει, το βάρος w_1 έχει αντίθετη φορά από την φορά κίνησης)
$W_{w,2} = - w_2 \cdot h \Rightarrow W_{w,2} = - m_2 \cdot g \cdot h \Rightarrow W_{w,2} = - 2 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow W_{w,2} = - 200$ joule .
Το συνολικό έργο των βαρών των σωμάτων :
$W_{w,o\lambda} = W_{w,1} + W_{w,2} \Rightarrow W_{w,o\lambda} = - 400 - 200 \Rightarrow W_{w,o\lambda} = - 600$ joule .
Δ_3.
Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας :
$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = W_F + W_{w,o\lambda} \Rightarrow K - 0 = F \cdot h + W_{w,o\lambda} \Rightarrow K = 90 \cdot 10 - 600 \Rightarrow K = 300$ joule .

8) Σε μια οριζόντια σανίδα μήκους d , τοποθετούμε σώμα μάζας m = 2 kg στο αριστερό άκρο της Α . Το αρχικά ακίνητο σώμα με την επίδραση της δύναμης F = 14 N διανύει όλο το μήκος της σανίδας και φτάνει στο δεξί άκρο της Γ . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και της σανίδας είναι μ = 0,4 .



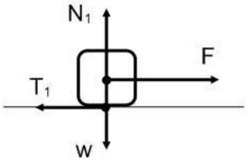
Η σανίδα τοποθετείτε έτσι ώστε να σχηματίζει κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ = 45° και τοποθετούμε ξανά το ίδιο σώμα αρχικά ακίνητο στο αριστερό άκρο και υπερυψωμένο άκρο της σανίδας Α΄ . Με την επίδραση του βάρους του το σώμα κατέρχεται κατά μήκος της σανίδας και κατέρχεται διανύοντας όλη την κεκλιμένη σανίδα μήκους d και φτάνει στο κάτω δεξί άκρο της Γ΄ .
Να υπολογίσετε :
Δ_1. Τον λόγο της τριβής ολίσθησης που παρουσιάζει το σώμα κατά την τριβή με την σανίδα όταν είναι οριζόντια προς την τριβή ολίσθησης που παρουσιάζει το σώμα κατά την τριβή με την σανίδα όταν αυτή έχει κλίση με το οριζόντιο επίπεδο .
Δ_2. Τον λόγο της επιτάχυνσης που παρουσιάζει το σώμα κατά την κίνηση του στην σανίδα όταν είναι οριζόντια προς την επιτάχυνση που παρουσιάζει το σώμα κατά την κίνηση του στην σανίδα όταν αυτή έχει κλίση με το οριζόντιο επίπεδο .
Δ_3. Τον λόγο της ταχύτητας που αποκτά το σώμα όταν έχει διανύσει όλο το μήκος της σανίδας ενώ αυτή είναι οριζόντια προς την ταχύτητα που αποκτά το σώμα όταν έχει διανύσει όλο το μήκος της σανίδας ενώ αυτή έχει κλίση με το οριζόντιο επίπεδο .

Δ$_4$. Τον λόγο της χρονικής διάρκειας που χρειάζεται το σώμα για να διανύσει όλο το μήκος της σανίδας ενώ αυτή είναι οριζόντια προς την χρονική διάρκεια που χρειάζεται το σώμα για να διανύσει όλο το μήκος της σανίδας ενώ αυτή έχει κλίση με το οριζόντιο επίπεδο .
Δίνεται $g = 10\ m / s^2$, $ημ\ 45° = συν\ 45° = \sqrt{2} / 2$, $\sqrt{2} = 1{,}4$ και $\sqrt{0{,}7} = 1{,}2$.

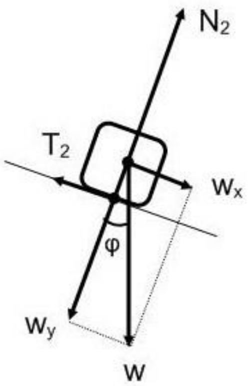
Λύση

Δ$_1$.

Η σανίδα είναι οριζόντια .



Η τριβή ολίσθησης μεταξύ του σώματος και της σανίδας :
$T_1 = μ·N_1 \Rightarrow$
(το σώμα ισορροπεί στο άξονα y :
$ΣF_{y,1} = 0 \Rightarrow$
$N_1 – w = 0 \Rightarrow$
$N_1 = w = m·g$)
$T_1 = μ·m·g$.
Η σανίδα σχηματίζει γωνία $φ = 45º$ με την οριζόντια διεύθυνση .



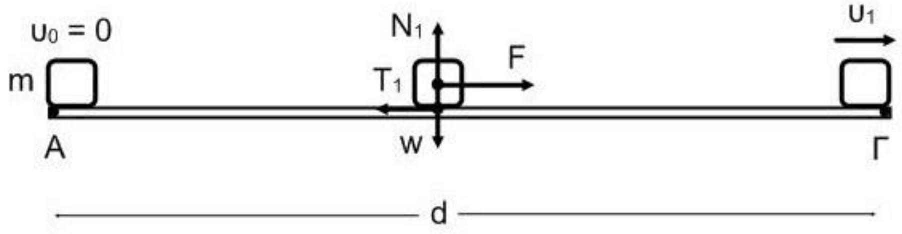
Η τριβή ολίσθησης μεταξύ του σώματος και της σανίδας :
$T_2 = μ·N_2 \Rightarrow$
(το σώμα ισορροπεί στο άξονα y :
$ΣF_{y,2} = 0 \Rightarrow$
$N_2 – w_y = 0 \Rightarrow$
$N_2 = w_y = m·g·συν\ φ$)
$T_2 = μ·m·g·συν\ 45º$.
Ο ζητούμενος λόγος :
$T_1 / T_2 = (μ·m·g) / (μ·m·g·συν\ 45º) \Rightarrow$
$T_1 / T_2 = 1 / (\sqrt{2} / 2) \Rightarrow$
$T_1 / T_2 = 2 / \sqrt{2} \Rightarrow$
$T_1 / T_2 = 2·\sqrt{2} / 2 \Rightarrow$
$T_1 / T_2 = \sqrt{2} \Rightarrow$
$T_1 / T_2 = 1{,}4$.

Δ$_2$.

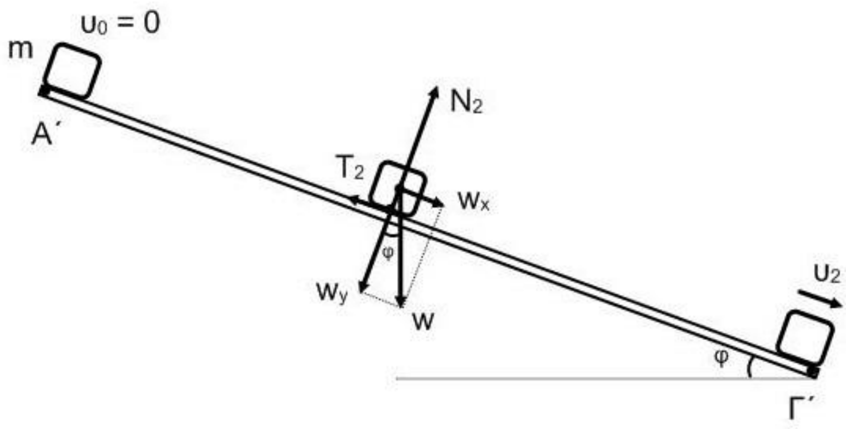
2ος νόμος του Newton για την κίνηση του σώματος στην οριζόντια σανίδα :
$ΣF_{1,x} = m·α_1 \Rightarrow$
$F – T_1 = m·α_1 \Rightarrow$
$F – μ·m·g = m·α_1 \Rightarrow$
$α_1 = (F – μ·m·g) / m \Rightarrow$
$α_1 = (14 – 0{,}4·2·10) / 2 \Rightarrow$
$α_1 = 3\ m / s^2$.
2ος νόμος του Newton για την κίνηση του σώματος στην κεκλιμένη σανίδα :
$ΣF_{2,x} = m·α_2 \Rightarrow$
$w_x – T_2 = m·α_2 \Rightarrow$
$m·g·ημ\ φ – μ·m·g·συν\ φ = m·α_2 \Rightarrow$

$\alpha_2 = (m \cdot g \cdot ημ\ φ - μ \cdot m \cdot g \cdot συν\ φ) / m \Rightarrow$
$\alpha_2 = g \cdot ημ\ 45° - μ \cdot g \cdot συν\ 45° \Rightarrow$
$\alpha_2 = 10 \cdot (\sqrt{2} / 2) - 0{,}4 \cdot 10 \cdot (\sqrt{2} / 2) \Rightarrow$
$\alpha_2 = 5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$
$\alpha_2 = 3 \cdot \sqrt{2}\ m / s^2$.
Ο ζητούμενος λόγος :
$\alpha_1 / \alpha_2 = 3 / (3 \cdot \sqrt{2}) \Rightarrow$
$\alpha_1 / \alpha_2 = \sqrt{2} / 2 \Rightarrow$
$\alpha_1 / \alpha_2 = 1{,}4 / 2$
$\alpha_1 / \alpha_2 = 0{,}7$.

Δ₃.
Η σανίδα είναι οριζόντια .



Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα m από την θέση Α στη θέση Γ :
(άλλη έκφραση της γενικότερης αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού)
$ΔK = W_{ΣF} \Rightarrow$
$K_Γ - K_A = W_F + W_T \Rightarrow$
$½ \cdot m \cdot υ_1^2 - 0 = F \cdot d - T_1 \cdot d \Rightarrow$
$υ_1^2 = 2 \cdot (F \cdot d - T_1 \cdot d) / m \Rightarrow$
$υ_1 = \sqrt{[2 \cdot (F \cdot d - T_1 \cdot d) / m]}$.
Η σανίδα είναι κεκλιμένη .



Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα m από την θέση Α΄ στη θέση Γ΄ :
(άλλη έκφραση της γενικότερης αρχής διατήρησης της ενέργειας που ισχύει παντού)
$ΔK΄ = W_{ΣF}΄ \Rightarrow$
$K_{Γ΄} - K_{A΄} = W_{wx} + W_{T2} \Rightarrow$
$½ \cdot m \cdot υ_2^2 - 0 = w_x \cdot d - T_2 \cdot d \Rightarrow$
$υ_2^2 = 2 \cdot (m \cdot g \cdot ημ\ 45° \cdot d - T_2 \cdot d) / m \Rightarrow$
$υ_2 = \sqrt{[2 \cdot (m \cdot g \cdot ημ\ 45° \cdot d - T_2 \cdot d) / m]}$.
Ο ζητούμενος λόγος :
$υ_1 / υ_2 = \sqrt{[2 \cdot (F \cdot d - T_1 \cdot d) / m]} / \sqrt{[2 \cdot (m \cdot g \cdot ημ\ 45° \cdot d - T_2 \cdot d) / m]} \Rightarrow$
$υ_1 / υ_2 = \sqrt{[2 \cdot (F - T_1)]} / \sqrt{[2 \cdot (m \cdot g \cdot ημ\ 45° - T_2)]} \Rightarrow$
{όπου $T_1 = μ \cdot m \cdot g \Rightarrow T_1 = 0{,}4 \cdot 2 \cdot 10 \Rightarrow T_1 = 8$ N
όπου $T_2 = μ \cdot m \cdot g \cdot συν\ 45^o \Rightarrow T_2 = 0{,}4 \cdot 2 \cdot 10 \cdot (\sqrt{2} / 2) \Rightarrow$
$T_2 = 4 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow T_2 = 4 \cdot 1{,}4 \Rightarrow T_2 = 5{,}6$}
$υ_1 / υ_2 = \sqrt{[2 \cdot (14 - 8)]} / \sqrt{[2 \cdot (2 \cdot 10 \cdot 0{,}7 - 5{,}6]} \Rightarrow$
$υ_1 / υ_2 = \sqrt{[12 / 16{,}4]} \Rightarrow$
$υ_1 / υ_2 = \sqrt{0{,}7}$.
$υ_1 / υ_2 \cong 0{,}84$.
Δ₄.

Η σανίδα είναι οριζόντια .
(η κίνηση που κάνει η μάζα m είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα)
$\upsilon_1 = \alpha_1 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \upsilon_1 / \alpha_1$.
Η σανίδα είναι κεκλιμένη .
(η κίνηση που κάνει η μάζα m είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα)
$\upsilon_2 = \alpha_2 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \upsilon_2 / \alpha_2$.
Ο ζητούμενος λόγος :
$t_1 / t_2 = (\upsilon_1 / \alpha_1) / (\upsilon_2 / \alpha_2) \Rightarrow$
$t_1 / t_2 = (\upsilon_1 / \upsilon_2) / (\alpha_2 / \alpha_1) \Rightarrow$
$t_1 / t_2 \cong 1 / 0{,}7 \Rightarrow$
$t_1 / t_2 \cong 1{,}2$.