

## ΑΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ ΣΤΑ ΚΥΜΑΤΑ

### ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΟΣ – ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ

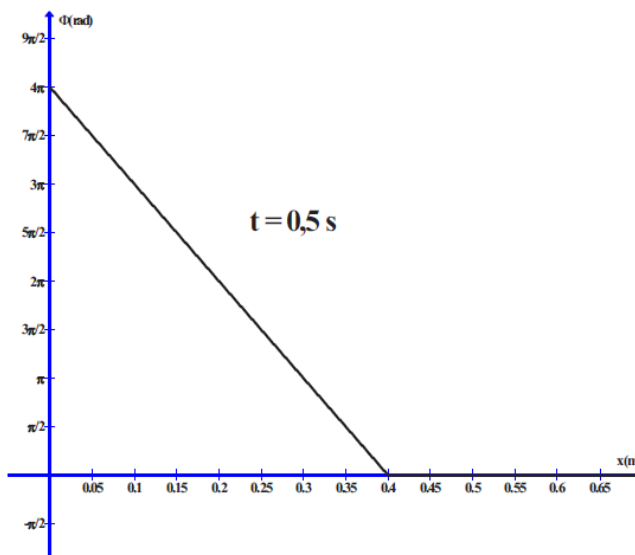
- 1) Ένα πλοίο βρίσκεται κοντά στην ακτή, ενώ επικρατεί ομίχλη.  
Για να προσδιορίσει ο καπετάνιος την απόσταση από την ακτή, εκπέμπει ηχητικό κύμα, οπότε ακούει δύο ήχους εξ' ανακλάσεως στην ακτή, με διαφορά χρόνου 5 δευτερολέπτων.  
Αν ο ήχος διαδίδεται στον αέρα και στο νερό με ταχύτητες 340 m/s και 1425 m/s αντίστοιχα, πόση νομίζετε ότι είναι η απόσταση του πλοίου από την ακτή;  
(Απ.  $\Delta x = 1116,36$  m)
- 2) Η συχνότητα αρμονικού κύματος είναι  $f = 0,5$  Hz ενώ η ταχύτητα διάδοσης του  $u = 2$  m/s.  
Να βρεθεί το μήκος κύματος.  
(Απ.  $\lambda = 4$  m)
- 3) Σε ένα σημείο του Ειρηνικού ωκεανού σχηματίζονται κύματα με μήκος κύματος 1 m και συχνότητα 1,25 Hz. Ποια είναι η ταχύτητα διάδοσης αυτών των κυμάτων;  
(Απ.  $u = 1,25$  m)
- 4) Να βρεθεί το μήκος κύματος ενός ήχου συχνότητας 2000 Hz,  
α. στον αέρα,  
β. στο νερό.  
Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα και στο νερό είναι αντίστοιχα 340 m/s και 1500 m/s για θερμοκρασία 15 °C.  
(Απ. α.  $\lambda_1 = 0,17$  m, β.  $\lambda_2 = 0,75$  m)
- 5) Σε έναν κυματοθραύστη σπάνε κύματα με ρυθμό 12 ανά λεπτό. Αν το μήκος κύματος είναι  $\lambda = 50$  m, ποια νομίζεται ότι είναι η ταχύτητα με την οποία ταξιδεύουν τα κύματα;  
(Απ.  $u = 10$  m/s)
- 6) Αν η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος είναι 340 m/s να υπολογίσετε:  
α. Το μήκος κύματος, αν η συχνότητα του είναι 256 Hz,  
β. Τη συχνότητα, αν το μήκος κύματος είναι 0,85 m.  
(Απ. α.  $\lambda = 1,328$  m, β.  $f = 400$  Hz)
- 7) Αρμονικό κύμα διαδίδεται σε ένα μέσο διάδοσης Α με ταχύτητα  $u_1 = 0,4$  m/s, ενώ το μήκος κύματος είναι  $\lambda_1 = 0,05$  m.  
Το κύμα εισέρχεται σε άλλο μέσο διάδοσης Β όπου διαδίδεται με ταχύτητα  $u_2 = 0,2$  m/s.  
Να βρεθεί το μήκος κύματος  $\lambda_2$  στο μέσο διάδοσης Β.  
(Απ.  $\lambda_2 = 0,025$  m)
- 8) Ένα κύμα συχνότητας  $f = 4$  Hz διαδίδεται σε ελαστικό μέσο με ταχύτητα  $u = 12$  m/s. Με τι είναι ίση η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων με μετατόπιση μηδέν;  
(Απ.  $\Delta x = 1,5$  m)
- 9) Ένα αρμονικό κύμα συχνότητας 200 Hz διαδίδεται με ταχύτητα  $u = 300$  m/s.  
Να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων που απέχουν 0,75 m κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.  
(Απ.  $\Delta \phi = \pi$  rad)
- 10) Ένας ψαράς κάθεται στη βάρκα του σε μια λίμνη και παρακολουθεί τη κυματική κίνηση του νερού. Η βάρκα του έχει μήκος 4,5 m και είναι τοποθετημένη παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων.  
Ο ψαράς παρατηρεί ότι περνά από ένα σημείο μπροστά του ένα όρος κύματος ανά 0,5 s. Επίσης μετρά ότι για να περάσει κατά μήκος της βάρκας ένας κυματικός παλμός χρειάζεται ένα δευτερόλεπτο.  
Να βρεθούν:  
Η περίοδος, η συχνότητα και το μήκος κύματος.  
(Απ.  $T = 0,5$  s,  $f = 2$  Hz,  $\lambda = 2,25$  m)

### ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ-ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ-ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ ΚΥΜΑΤΟΣ-ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

- 11) Για ένα αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα  $x'$ , να υπολογίσετε:  
α) τη διαφορά φάσης μεταξύ δυο σημείων του ελαστικού μέσου, τα οποία απέχουν μεταξύ τους κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, απόσταση ίση με  $d$ , την ίδια χρονική στιγμή.  
β) τη διαφορά φάσης της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου, μεταξύ δυο διαφορετικών χρονικών στιγμών  $t_1$  και  $t_2$ . ( $t_2 > t_1$ ).  
(Απ. α.  $\Delta \phi = 2\pi d/\lambda$ , β.  $\Delta \phi = \omega \Delta t$ )
- 12) α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση  $\Delta x$  μεταξύ δυο σημείων του ελαστικού μέσου, τα οποία την ίδια χρονική στιγμή βρίσκονται σε ίσες απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας τους και κινούνται με ίσες ταχύτητες (κατά μέτρο και κατεύθυνση), δίνεται από τη σχέση  
 $\Delta x = k \cdot \lambda$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (συμφωνία φάσης)  
β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση  $\Delta x$  μεταξύ δυο σημείων του ελαστικού μέσου, τα οποία την ίδια χρονική στιγμή βρίσκονται σε αντίθετες απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας τους και κινούνται με αντίθετες ταχύτητες, δίνεται από τη σχέση  
 $\Delta x = (2k+1) \cdot \lambda/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (αντίθεση φάσης)
- 13) Κατά μήκος ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον προσανατολισμένο άξονα  $x'$ , διαδίδεται κύμα με ταχύτητα 50 m/s. Θεωρούμε ως αρχή του άξονα ένα σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα τη χρονική στιγμή  $t=0$  και το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση  $y=0,04\eta\mu 4\pi t$  (S.I.)  
α) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει να ταλαντώνεται ένα σημείο Μ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται σε απόσταση 500 m από το σημείο Ο;  
β) Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης του σημείου Μ και της αρχής Ο την ίδια χρονική στιγμή.  
γ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή  $t=20$  s.  
δ) Ποια η ταχύτητα και ποια η επιτάχυνση του σημείου Μ τη χρονική στιγμή  $t=20$  s;  
ε) Ποια είναι η μεταβολή φάσης του σημείου Μ μεταξύ των χρονικών στιγμών  $t_1=20$  s και  $t_2=30$  s;  
(Απ. α.  $t=10$  s, β.  $\Delta \phi=40\pi$  rad, γ.  $y=0$ , δ.  $u=0,16\pi$  m/s, ε.  $\alpha=0$ , ε.  $\Delta \phi=40\pi$  rad)

**14)** Κατά μήκος ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον προσανατολισμένο άξονα  $x'$  διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Θεωρούμε ως αρχή ου άξονα ένα σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα τη χρονική στιγμή  $t=0$  και το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση  $y=0,02\eta\mu\omega t$  (S.I.). Στο διάγραμμα του σχήματος δίνεται η μεταβολή της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση  $x$ , τη χρονική στιγμή  $t=0,5$  s.

- α) Να υπολογίσετε τη περίοδο και το μήκος του κύματος.  
 β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.  
 γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t=0,625$  s.  
 δ) Να σχεδιάσετε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του ενός σημείου του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στη θέση 0,25 m, σε συνάρτηση με το χρόνο.  
 (Απ. α.  $T=0,25$  s,  $\lambda=0,2$  m,  $y=0,02\eta\mu 2\pi(4t-5x)$  (S.I.) )



**15)** Ένα ελαστικό κύμα έχει συχνότητα  $f = 5$  Hz, πλάτος  $A = 0,01$  m και ταχύτητα διάδοσης  $v = 20$  m / s. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η απομάκρυνση της πηγής του κύματος είναι  $y = 0$  m. Να βρείτε :

α. Την κυκλική συχνότητα  $\omega$ , την περίοδο  $T$  και το μήκος κύματος  $\lambda$ .

β. Την κυματοσυνάρτηση (εξίσωση του κύματος) που περιγράφει το κύμα.

(Απ. α.  $\omega = 10\pi$  rad / s,  $T = 0,2$  s,  $\lambda = 4$  m, β.  $y(x, t) = 0,01\eta\mu\{2\pi\cdot[5\cdot t - (x / 4)]\}$  )

**16)** Ένα εγκάρσιο κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός οριζόντιου νήματος και από αριστερά προς τα δεξιά, με ταχύτητα  $v = 100$  m / s. Το κύμα έχει πλάτος  $A = 0,1$  m, μήκος κύματος  $\lambda = 1,6$  m και η πηγή του τη χρονική στιγμή  $t = 0$  έχει απομάκρυνση  $y = 0$  και κινείται προς τα πάνω.

α. Ποια είναι η συχνότητα του κύματος ;

β. Ποια είναι η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα ;

γ. Πόση είναι η μετατόπιση ενός σωματιδίου, που βρίσκεται σε απόσταση  $x = 0,8$  m από την πηγή τη χρονική στιγμή  $t = 0,032$  s ;

(Απ. α.  $f = 62,5$  Hz, β.  $y(x, t) = 0,1\eta\mu\{2\pi\cdot[62,5\cdot t - (x / 1,6)]\}$ , (S.I.), γ.  $y(x_M, t_1) = 0$  )

**17)** Εγκάρσιο οριζόντιο κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα  $x'$  με ταχύτητα  $v = 3$  m / s. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η πηγή του κύματος έχει απομάκρυνση  $y = 0$  και αρχίζει να κινείται προς τα πάνω με συχνότητα  $f = 0,25$  Hz.

Αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι  $A = 10$  cm, να βρείτε :

α. Το μήκος κύματος,

β. Τη χρονική στιγμή  $t_1$  που αρχίζει να δονείται ένα σωματίδιο, το οποίο απέχει από την πηγή  $x_1 = 120$  m,

γ. Την απομάκρυνση που παρουσιάζει το σωματίδιο τη χρονική στιγμή  $t_2 = 50$  s.

(Απ. α.  $\lambda = 12$  m, β.  $t_1 = 40$  s, γ.  $y(x_1, t_2) = 0$  )

**18)** Η κυματοσυνάρτηση αρμονικού κύματος είναι :

$y = -0,6\eta\mu(4\pi\cdot x - 2\pi\cdot t)$ , (S.I.)

Η πηγή του κύματος βρίσκεται στην αρχή Ο των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων  $xOy$  και αρχίζει την ταλάντωσή της τη στιγμή  $t = 0$ .

α. Ποια χρονική στιγμή αρχίζει να ταλαντώνεται σημείο Κ του άξονα  $x$  με  $x_K = 3,5$  m ;

Ποια η απομάκρυνση σημείου Μ του ίδιου άξονα με  $x_M = 2,25$  m την παραπάνω χρονική στιγμή ;

β. Να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Μ και Κ.

γ. Ποιες χρονικές στιγμές το μέσο Ν του τμήματος ΜΚ έχει απομάκρυνση  $y = 0,3$  m ;

δ. Να προσδιοριστούν τα σημεία μεταξύ Μ και Κ που έχουν απομάκρυνση  $y = 0$  την στιγμή  $t = 10$  s.

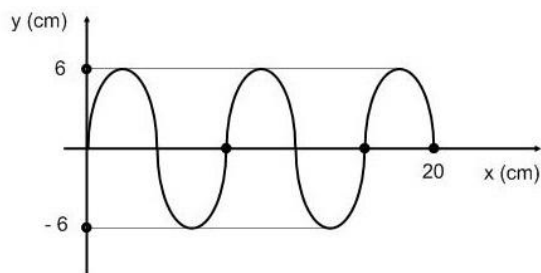
(Απ. α.  $t_K = 7$  s,  $y_M = 0$  β.  $\Delta\phi_{M,K} = 5\pi$  rad, γ.  $t = (6\cdot\kappa + 35) / 6$  s και  $t = (12\cdot\kappa + 74) / 12$  s, δ.  $x_1 = 2,5$  m,  $x_2 = 2,75$  m,  $x_3 = 3$  m,  $x_4 = 3,25$  m )

**19)** Να βρεθεί η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας ενός μορίου το οποίο απέχει από τη πηγή των κυμάτων κατά  $d = \lambda / 12$  τη χρονική στιγμή  $t = T / 6$ . Το πλάτος των ταλαντώσεων είναι  $A = 0,05$  m.

Ποια η μέγιστη ταχύτητα του υλικού σημείου αν  $T = \pi$  s.

(Απ. α.  $y = 0,025$  m, β.  $u_{\max} = 0,1$  m / s)

**20)**



Το κύμα του παραπάνω σχήματος διαδίδεται με ταχύτητα  $v = 300$  m / s.

Ποια η εξίσωση του κύματος ;

( Απ.  $y = 0,06\eta\mu[2\pi\cdot(3750\cdot t - 12,5\cdot x)]$  )

**21)** Ένα αρμονικό κύμα έχει πλάτος  $A = 10 \text{ cm}$  και συχνότητα  $f = 2 \text{ Hz}$ .

Να βρεθεί η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και η ταχύτητα ενός σημείου που βρίσκεται σε απόσταση  $x = \lambda / 4$  από τη πηγή των κυμάτων τη χρονική στιγμή  $t = 3 \cdot T / 8$ .

(Απ. α.  $y = 0,05 \cdot \sqrt{2} \text{ m}$ , β.  $u = 0,2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$ )

**22)** Ένα εγκάρσιο κύμα διαδίδεται με ταχύτητα  $u = 4 \text{ m/s}$ . Η συχνότητα του κύματος είναι  $f = 0,5 \text{ Hz}$  ενώ το πλάτος των ταλαντώσεων είναι  $A = 0,2 \text{ m}$ . Αν στο σημείο  $O$  που είναι η πηγή του κύματος για  $t = 0$  το  $y = 0$ , να βρεθούν:

α. Το μήκος κύματος,

β. Ποια χρονική στιγμή αρχίζει να ταλαντώνεται σημείο  $M$  που βρίσκεται σε απόσταση  $x_M = 100 \text{ m}$  από το σημείο  $O$ ;

γ. Ποια η απομάκρυνση και η ταχύτητα του σημείου  $M$  τη χρονική στιγμή  $t = 60 \text{ s}$ .

(Απ. α.  $\lambda = 8 \text{ m}$ , β.  $t = 25 \text{ s}$ , γ.  $y = 0$ ,  $u = -0,2 \cdot \pi \text{ m/s}$ )

**23)** Αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος του ημιάξονα  $Ox$  περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$y = 0,02 \cdot \eta\mu(4 \cdot \pi \cdot t - 10 \cdot \pi \cdot x), \text{ (S.I.)}$$

Το κύμα ξεκινά τη διάδοσή του από το  $O$  τη στιγμή  $t = 0$ . Να προσδιοριστεί το σημείο (ή τα σημεία) του  $Ox$  που τη στιγμή  $t = 0,75 \text{ s}$  έχει απομάκρυνση  $y = -0,01 \text{ m}$  και αρνητική φορά κίνησης.

(Απ.  $x = (11 / 60) \text{ m}$ )

**24)** Υλικό σημείο ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στην αρχή  $O$  συστήματος συντεταγμένων  $xOy$ , αρχίζει τη στιγμή  $t = 0$  να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στη διεύθυνση  $y$  με συχνότητα  $2 \text{ Hz}$  και πλάτος  $0,12 \text{ m}$ . Η φάση του τη στιγμή  $t = 0$  είναι  $\phi = 0$ . Η ταλάντωση διαδίδεται στη διεύθυνση  $Ox$  με ταχύτητα  $2 \text{ m/s}$ .

Να βρεθούν:

α. Η θέση σημείου  $A$  του  $Ox$  αν γνωρίζουμε ότι αυτό έχει τη μέγιστη (θετική) απομάκρυνση για 3η φορά τη στιγμή  $t = 4 \text{ s}$ .

β. Οι θέσεις των σημείων του άξονα  $x$  που έχουν με το  $A$  διαφορά φάσης  $3\pi / 4$ .

(Απ. α.  $x_A = 5,75 \text{ m}$ , β.  $x_K = 5,375 \text{ m}$  και  $x_L = 6,125 \text{ m}$ )

**25)** Χορδή είναι τοποθετημένη κατά μήκος του οριζώντιου ημιάξονα  $Ox$  και το ένα άκρο της  $A$  συμπίπτει με το  $O$ . Το  $A$  ταλαντώνεται κατακόρυφα στη διεύθυνση του άξονα  $y$ . Το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης του  $A$  είναι  $10 \text{ cm}$ , η συχνότητα  $2 \text{ Hz}$  και τη στιγμή  $t = 0$  αυτό βρίσκεται στο  $O$  κινούμενο προς την αρνητική φορά του  $y$ . Το κύμα που διαδίδεται στη χορδή έχει ταχύτητα  $2 \text{ m/s}$ .

α. Να βρεθεί η  $y = f(t)$  για την κίνηση του  $A$ ,

β. Να βρεθεί η  $y = f(x,t)$  που περιγράφει το κύμα,

γ. Να βρεθεί την στιγμή  $t = 1 \text{ s}$  η απομάκρυνση σημείου  $M$  της χορδής με  $x_M = 0,5 \text{ m}$ ,

δ. Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή  $t = 1 \text{ s}$ .

(Απ. α.  $y_A = -0,1 \cdot \eta\mu(4 \cdot \pi \cdot t)$ , β.  $y = -0,1 \cdot \eta\mu(4 \cdot \pi \cdot t - 2 \cdot \pi \cdot x)$ , (S.I.), γ.  $y_M = 0$ )

**26)** Αρμονικό κύμα συχνότητας  $2 \text{ Hz}$  διαδίδεται με ταχύτητα  $1,2 \text{ m/s}$  προς την αρνητική φορά του άξονα  $x$  συστήματος συντεταγμένων  $xOy$ . Τα σωμάτια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται στην διεύθυνση του άξονα  $y$  με πλάτος  $0,12 \text{ m}$ . Το σημείο  $O$  ξεκινά την ταλάντωσή του τη στιγμή  $t = 0$  κινούμενο προς τη θετική φορά του  $y$ . Να βρεθούν την στιγμή  $t = 1,125 \text{ s}$ :

α. Η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σημείου  $A$  του μέσου, που η

θέση ισορροπίας του είναι στον άξονα  $x$ , με  $x_A = 3 \text{ m}$ .

β. Η φάση του  $A$  και ενός σημείου  $B$  με  $x_B = 4,5 \text{ m}$ .

Δίνεται  $\pi^2 \cong 10$ .

(Απ. α.  $y_A = 0,12 \text{ m}$ ,  $u_A = 0$ ,  $a_A = -19,2 \text{ m/s}^2$ , β.  $\phi_B = 19,5 \cdot \pi \text{ rad}$ )

**27)** Ένα μικρό κομμάτι φελλού μάζας  $m = 5 \text{ kg}$  ταλαντώνεται σε μια λεκάνη με νερό, λόγω των κυμάτων, που διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού, με ταχύτητα  $0,2 \text{ m/s}$ . Τα κύματα έχουν πλάτος  $5 \text{ mm}$  και μήκος κύματος  $15 \text{ mm}$ . Να βρείτε τη μέγιστη κινητική ενέργεια της ταλάντωσης του φελλού.

Δίνεται  $\pi^2 \cong 10$ .

(Απ.  $K_{\max} = 0,444 \text{ joule}$ )

**28)** Αρμονικό κύμα που περιγράφεται από τη μαθηματική σχέση:

$$y = 10 \cdot \eta\mu(10 \cdot t - 2 \cdot x) \text{ [x, y σε cm και t σε s]}$$

διαδίδεται σε ελαστικό μέσο.

Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου του μέσου, την στιγμή που αυτό έχει απομάκρυνση  $8 \text{ cm}$ .

(Απ.  $u = 0,6 \text{ m/s}$ ,  $a = -8 \text{ m/s}^2$ )

## ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ

**29)** Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα  $Ox$  και η εξίσωσή του είναι

$$y = 0,4 \eta\mu\pi \left( 5t - 2x + \frac{1}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

Το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή  $O$  ( $x=0$ ) του άξονα έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα κάποια χρονική στιγμή πριν την  $t=0$ .

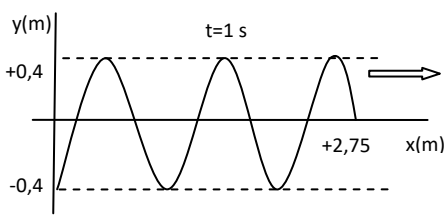
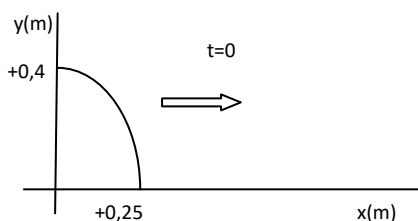
α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

β) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο  $K$  ( $x_K = 1,75 \text{ m}$ ).

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές  $t=0$  και  $t_1 = 1 \text{ s}$ .

(Απ. α.  $u_0 = 2,5 \text{ m/s}$ , β.  $t_K = 0,6 \text{ s}$ ,

γ.



## ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

**30)** Δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ , δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα ίδιου πλάτους 0,5 cm και συχνότητας 5 Hz. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι 40 cm/s. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού και απέχει από τις δύο πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αποστάσεις 28 cm και 44 cm, αντίστοιχα.

α) Ποια είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυμάτων, την ίδια χρονική στιγμή στο Σ;

β) Κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $\Pi_1\Pi_2$  βρίσκεται ένα δεύτερο κομμάτι φελλού. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη απόσταση του φελλού από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $\Pi_1\Pi_2$  ώστε ο φελλός να παραμένει διαρκώς ακίνητος;

(Απ. α.  $\phi_1 - \phi_2 = 4\pi$ , β.  $x_{\min} = \pm 2$  cm)

**31)** Υποθέτουμε ότι δύο μικρά ηχεία τα οποία τροφοδοτούνται από τον ίδιο ενισχυτή είναι τοποθετημένα όπως φαίνεται στην εικόνα. Τα ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα ίδιας φάσης των οποίων η ταχύτητα είναι  $v = 350$  m/s. Για ποιες συχνότητες των εκπεμπόμενων κυμάτων ένας ακροατής στο σημείο Α θα αντιλαμβάνεται φαινόμενα αναιρετικής συμβολής και για ποιες θα αντιλαμβάνεται συμβολή ενισχυτική;

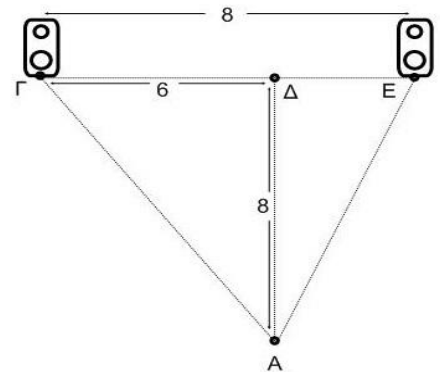
Δίνεται  $\sqrt{68} = 8,25$ .

(Απ. αναιρετική (αποσβεστική) συμβολή:  $f = 100 \cdot (2 \cdot N + 1)$ .

Το N παίρνει τιμές 0, 1, 2, 3, ... ,

ενισχυτική συμβολή:  $f = 200 \cdot N$ .

Το N παίρνει τιμές 0, 1, 2, 3, ... )



**32)** Δύο ηχεία βρίσκονται σε δύο σημεία Α και Β, που απέχουν 7 m. Τα ηχεία τροφοδοτούνται από τον ίδιο ενισχυτή και εκπέμπουν ηχητικά κύματα ίδιας φάσης, τα οποία έχουν συχνότητα  $f = 170$  Hz και διαδίδονται με ταχύτητα  $v = 340$  m/s.

α. Ποιο είναι το μήκος κύματος  $\lambda$ ;

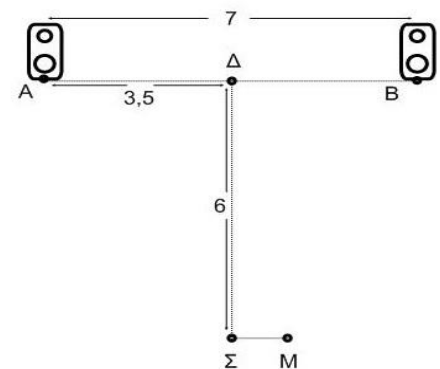
β. Ένας μαθητής στέκεται στο σημείο Σ που ισαπέχει από τα δύο ηχεία και που η απόσταση του από την ΑΒ είναι 6 cm.

Τι ακούει ο μαθητής;

γ. Υποθέστε πως ο μαθητής μετακινείται κατά 1 m σε ένα άλλο σημείο Μ που απέχει πάλι 6 m από την ΑΒ.

Τι ακούει στην περίπτωση αυτή ο μαθητής;

(Απ. α.  $\lambda = 2$  m, β. Ο μαθητής ακούει ενισχυτική συμβολή, πλάτους  $A_\Sigma = 2 \cdot A$ , γ. Έχουμε αποσβεστική συμβολή με  $N = 0$ , άρα ο μαθητής δεν θα ακούει τίποτα.)



**33)** Στα άκρα σύρματος μήκους 3,6 cm έχουν στερεωθεί δύο μικρές ακίδες Α, Β οι οποίες είναι ελάχιστα βυθισμένες σε υγρό.

Το σύρμα τίθεται σε ταλάντωση με συχνότητα 20 Hz οπότε κάθε ακίδα δημιουργεί κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα 24 cm/s. Να βρεθούν τα σημεία μεταξύ Α, Β που :

α. παραμένουν ακίνητα,

β. πάλλονται με το μέγιστο πλάτος.

(Απ. α.  $r_1 = 0,6 \cdot N + 2,1$ , με  $N = -3, -2, -1, 0, 1, 2$  επομένως:  $x_1 = 0,3$  cm,  $x_2 = 0,9$  cm,  $x_3 = 1,5$  cm,  $x_4 = 2,1$  cm,  $x_5 = 2,7$  cm,  $x_6 = 3,3$  cm,

β.  $r_1 = N \cdot 0,6 + 1,8$ , με  $N = -2, -1, 0, 1, 2$ . Άρα:  $x_1 = 0,6$  cm,  $x_2 = 1,2$  cm,  $x_3 = 1,8$  cm,  $x_4 = 2,4$  cm,  $x_5 = 3$  cm.)

**34)** Στην επιφάνεια υγρού δημιουργούν κύματα δύο πηγές Α, Β που ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος, συχνότητα και φάση. Δίνεται  $(AB) = 12,5$  cm. Θεωρούμε μια ευθεία

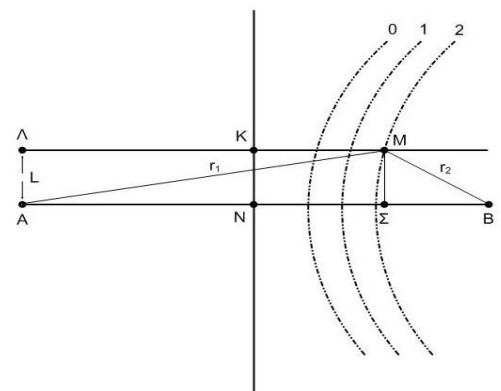
ε στην επιφάνεια του υγρού παράλληλη στο ΑΒ που απέχει 6 cm από αυτό.

Ονομάζουμε Κ το σημείο που τέμνει την ε η μεσοκάθετος του ΑΒ. Έστω Μ το 3ο

σημείο της ε μετά το Κ στο οποίο έχουμε απόσβεση.

$AN(KM) = 1,75$  cm και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι 4 cm/s να βρεθεί η συχνότητα ταλάντωσης των πηγών.

(Απ.  $f = 4$  Hz)



## ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

- 35)** Δύο πηγές κυμάτων Α, Β που βρίσκονται στην επιφάνεια υγρού ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος, συχνότητα και φάση. Θεωρούμε την μεσοκάθετο ευθεία ε του ΑΒ που χωρίζει την επιφάνεια του υγρού σε δύο ημιεπίπεδα. και δύο σημεία Κ, Λ της επιφάνειας του υγρού. Το Κ με το Α και το Λ με το Β βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.
- α. Έστω ότι τα Κ, Λ ταλαντώνονται με το μέγιστο πλάτος και ότι άλλα επτά σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ ταλαντώνονται με το μέγιστο πλάτος.  
Να βρεθεί το μήκος κύματος των δύο κυμάτων αν :  
(ΛΑ) – (ΛΒ) = 10 cm και (ΚΒ) – (ΚΑ) = 6 cm .
- β. Έστω ότι στα Κ, Λ έχουμε απόσβεση και ότι το ίδιο συμβαίνει για άλλα έξι σημεία του τμήματος ΚΛ.  
Να βρεθεί το μήκος κύματος των δύο κυμάτων αν :  
(ΛΑ) – (ΛΒ) = 9 cm και (ΚΒ) – (ΚΑ) = 5 cm .
- ( Απ. α.  $\lambda = 2$  cm, β.  $\lambda = 2$  cm )
- 36)** Κατά μήκος του ίδιου γραμμικού ελαστικού μέσου και προς αντίθετες κατευθύνσεις, διαδίδονται ταυτόχρονα δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα, τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις:  $y_1 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$  και  $y_2 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$ . Από τη συμβολή των δυο αυτών κυμάτων δημιουργείται στο ελαστικό μέσο στάσιμο κύμα.
- Για το στάσιμο κύμα γνωρίζουμε ότι
- Δύο διαδοχικοί δεσμοί του απέχουν μεταξύ τους κατά 20 cm.
  - Ένα σημείο του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στη θέση μια κοιλίας εκτελεί αρμονική ταλάντωση συχνότητας 5 Hz και πλάτους 8 cm.
- α) Να εξετάσετε αν στη θέση  $x=0$  υπάρχει δεσμός ή κοιλία του στάσιμου.  
β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των δυο αρμονικών κυμάτων.  
γ) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου.  
δ) Να σχεδιάσετε στους ίδιους άξονες τα στιγμιότυπα του στάσιμου κατά τις χρονικές στιγμές  $t_1=0$ ,  $t_2=7T/12$  και  $t_3=3T/4$ , όπου Τ η περίοδος των κυμάτων.
- (Απ. α. κοιλία , β.  $u=2$  m/s , γ.  $y = 0,08\sigma\upsilon\nu 5\pi x \cdot \eta\mu 10\pi t$  (S.I.) )
- 37)** Ένα κύμα συχνότητας  $f = 500$  Hz διαδίδεται με ταχύτητα  $u = 360$  m / s .
- α. Πόσο απέχουν δύο σημεία κατά μήκος μιας ακτίνας διάδοσης του κύματος , τα οποία παρουσιάζουν διαφορά φάσης  $\Delta\phi = \pi / 3$  ;  
β. Αν το κύμα , λόγω συμβολής με άλλο όμοιο , που διαδίδεται σε αντίθετη κατεύθυνση , δώσει στάσιμο , πόσο νομίζετε ότι θα απέχουν δύο διαδοχικοί δεσμοί ;
- (Απ. α.  $\Delta x = 0,12$  m β.  $\Delta x' = 0,36$  m )
- 38)** Ένα εγκάρσιο κύμα συχνότητας  $f = 850$  Hz διαδίδεται οριζόντια με ταχύτητα  $u$  . Το κύμα προσπίπτει σε κατακόρυφο τοίχο , οπότε ανακλάται σχηματίζοντας έτσι στάσιμο κύμα .  
Αν η πρώτη κοιλία (από τον τοίχο) απέχει από τον τέταρτο δεσμό απόσταση  $d = 0,5$  cm να βρείτε την ταχύτητα του τρέχοντος κύματος .
- (Απ.  $u = 340$  m / s)
- 39)** Στάσιμο κύμα περιγράφεται από τη συνάρτηση :  
 $y = 2 \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu (2 \cdot \pi \cdot x / \lambda) \cdot \eta\mu (2 \cdot \pi \cdot t / T)$  .  
Ένα σημείο Κ του μέσου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α . Δείξτε ότι η ελάχιστη απόσταση του Κ από ένα δεσμό είναι  $\lambda / 12$  .
- 40)** Δύο κύματα που περιγράφονται στο (S.I.) από τις συναρτήσεις :  
 $y_1 = 0,12 \cdot \eta\mu [4 \cdot \pi \cdot t - (5 \cdot \pi \cdot x / 3)]$  και  $y_2 = 0,12 \cdot \eta\mu [4 \cdot \pi \cdot t + (5 \cdot \pi \cdot x / 3)]$  ,  
διαδίδονται κατά μήκος του άξονα x και από τη συμβολή τους προκύπτει στάσιμο κύμα.
- α. Να δοθεί η  $y = f(t,x)$  για το στάσιμο κύμα ,  
β. Θεωρούμε ένα σημείο Μ του ημιάξονα  $Ox$  όπου υπάρχει η 4η κοιλία από το Ο, συμπεριλαμβανομένης και αυτής στο Ο. Να βρεθεί η απόσταση ΟΜ και ο αριθμός των δεσμών μεταξύ Ο και Μ ,  
γ. Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης σημείου Ν του  $Ox$  με  $x_N = 0,15$  m . Ποια σημεία μεταξύ Ο και Μ ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος ;  
δ. Να βρεθεί η απομάκρυνση του Ν τη στιγμή  $t = (65 / 16)$  s ,  
ε. Ποιες χρονικές στιγμές η απομάκρυνση του Ν είναι  $y = 0,12$  m ;
- (Απ. α.  $y = 0,24 \cdot \sigma\upsilon\nu [5 \cdot \pi / 3] \cdot x \cdot \eta\mu (4 \cdot \pi \cdot t)$  , (S.I.) , β.  $x_\Delta = (2 \cdot N + 1) \cdot 0,3$ , Πρέπει :  $0 < (2 \cdot N + 1) \cdot 0,3 < 1,8 \Rightarrow N = 0, 1, 2$  επομένως υπάρχουν τρεις (3) δεσμοί, γ.  $A_N' = 0,12 \cdot \sqrt{2}$  m,  $x_1 = 0,15$  m,  $x_2 = 0,75$  m,  $x_3 = 1,35$  m,  $x_4 = 0,45$  m,  $x_5 = 1,05$  m,  $x_6 = 1,65$  m, δ.  $y_N = 0,12$  m, ε.  $t = (8 \cdot \kappa + 3) / 16$  )
- 41)** Το άκρο Α μιας χορδής ΑΒ μήκους  $l = 0,9$  m είναι ελεύθερο , ενώ το άκρο Β της χορδής είναι ακλόνητα στερεωμένο . Ένα αρμονικό κύμα πλάτους  $y_0 = 4$  cm διαδίδεται με ταχύτητα  $u = 4$  m / sec από το άκρο Α προς το άκρο Β της χορδής , ανακλάται στο ανένδοτο άκρο Β και διαδίδεται προς την αντίθετη κατεύθυνση . Διαπιστώνεται ότι μεταξύ των άκρων Α και Β υπάρχουν τέσσερα σημεία της χορδής που παραμένουν συνεχώς ακίνητα.
- Ζητούνται:
- α. Να γραφούν οι εξισώσεις του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος καθώς και του στάσιμου κύματος που προκύπτει από την συμβολή των δύο αυτών κυμάτων.  
β. Πωων συχνοτήτων κύματα μπορούν να δημιουργήσουν στάσιμα κύματα πάνω στη χορδή ΑΒ;  
Ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων ( $x = 0$ ) να θεωρηθεί το άκρο Β της χορδής και ως αρχή των χρόνων ( $t = 0$ ) η χρονική στιγμή κατά την οποία το κύμα φθάνει στο άκρο Β.
- (Απ. α.  $y_1 = 0,04 \cdot \eta\mu (20 \cdot \pi \cdot t + 5 \cdot \pi \cdot x)$  , (S.I.) ,  $y_2 = 0,04 \cdot \eta\mu (5 \cdot \pi \cdot x - 20 \cdot \pi \cdot t)$  , (S.I.) ,  $y = 0,08 \cdot \eta\mu (5 \cdot \pi \cdot x) \cdot \sigma\upsilon\nu (20 \cdot \pi \cdot t)$  , (S.I.) , β.  $f = (2 \cdot \kappa + 1) \cdot (10 / 9)$  , με  $\kappa = 0, 1, 2, 3$  )