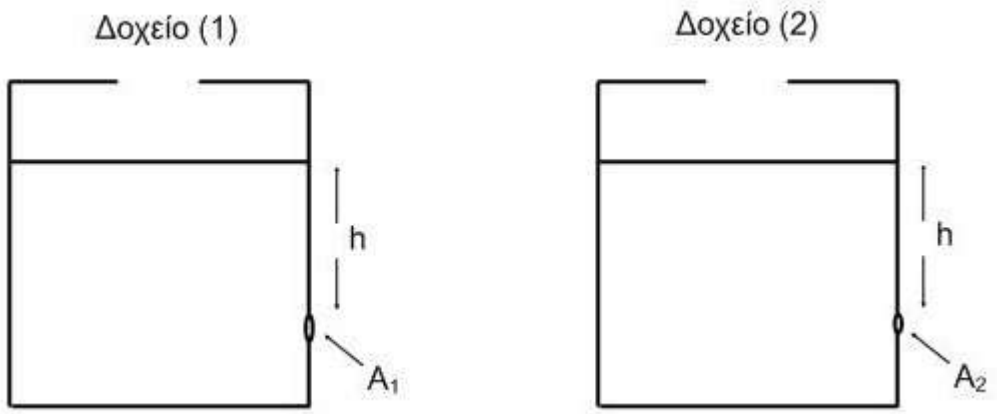
1) Υποθέστε ότι δύο δοχεία το καθένα με ένα μεγάλο άνοιγμα στην κορυφή περιέχουν διαφορετικά υγρά . Μια μικρή τρύπα ανοίγεται στο πλευρό του καθενός δοχείου στην ίδια απόσταση h κάτω από την επιφάνεια του υγρού . Η μία τρύπα όμως έχει διπλάσια διατομή από την άλλη ($A_1 = 2 \cdot A_2$).



Α.

α. Ποια η σχέση μεταξύ των παροχών όγκου .

β. Ποιος ο λόγος των πυκνοτήτων των ρευστών αν παρατηρείται ότι η ροή μάζας είναι ίδια για κάθε τρύπα .

γ. Τι πρέπει να κάνουμε για να γίνουν οι παροχές όγκου ίσες .

Β.

Αν για τις αρχικές διατομές όπου $A_1 = 2 \cdot A_2$ μεταβάλλουμε την απόσταση h της μιας τρύπας από την επιφάνεια του υγρού (π.χ. προσθέτουμε ή αφαιρούμε υγρό) έτσι ώστε $h_2 = 4 \cdot h_1$ τότε η σχέση για τις παροχές όγκου είναι :

α. $\Pi_1 = \Pi_2$, **β.** $\Pi_1 = 2 \cdot \Pi_2$, **γ.** $\Pi_2 = 2 \cdot \Pi_1$.

Να βρεθεί η σωστή επιλογή και να αιτιολογηθεί .

Λύση

α.

Δοχείο (1) ρευστό πυκνότητας ρ_1 , διατομής τρύπας A_1 , σε χρόνο dt εκρέει ρευστό μάζας dm_1 και όγκου dV_1 .

Δοχείο (2) ρευστό πυκνότητας ρ_2 , διατομής τρύπας A_2 , σε χρόνο dt εκρέει ρευστό μάζας dm_2 και όγκου dV_2 .

Επίσης :

$A_1 = 2 \cdot A_2$,

$\Pi_1 = dV_1 / dt$ και

$\Pi_2 = dV_2 / dt$.

Από το θεώρημα του Torricelli :

$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h)}$.

Ισχύει :

$\Pi_1 = A_1 \cdot \upsilon_1$.

$\Pi_2 = A_2 \cdot \upsilon_2$.

Διαιρούμε κατά μέλη τις δύο σχέσεις :

$\Pi_1 / \Pi_2 = (A_1 \cdot \upsilon_1) / (A_2 \cdot \upsilon_2) \Rightarrow$

(όπου $\upsilon_1 = \upsilon_2$, $A_1 = 2 \cdot A_2$)

$\Pi_1 / \Pi_2 = (2 \cdot A_2) / A_2 \Rightarrow$

$\Pi_1 / \Pi_2 = 2$.

β.

$dm_1 / dt = \rho_1 \cdot (dV_1 / dt) \Rightarrow$

$dm_1 / dt = \rho_1 \cdot \Pi_1$, ροή μάζας (1) .

$dm_2 / dt = \rho_2 \cdot (dV_2 / dt) \Rightarrow$

$dm_2 / dt = \rho_2 \cdot \Pi_2$, ροή μάζας (2) .

$dm_1 / dt = dm_2 / dt \Rightarrow$

$\rho_1 \cdot \Pi_1 = \rho_2 \cdot \Pi_2 \Rightarrow$

$\rho_1 / \rho_2 = \Pi_2 / \Pi_1 \Rightarrow$

$\rho_1 = \rho_2 / 2$.

γ.

Για να γίνουν οι παροχές όγκου ίσες πρέπει $A_1 = A_2'$, άρα πρέπει να ανοίξουμε περισσότερο την τρύπα (2) .

Β.

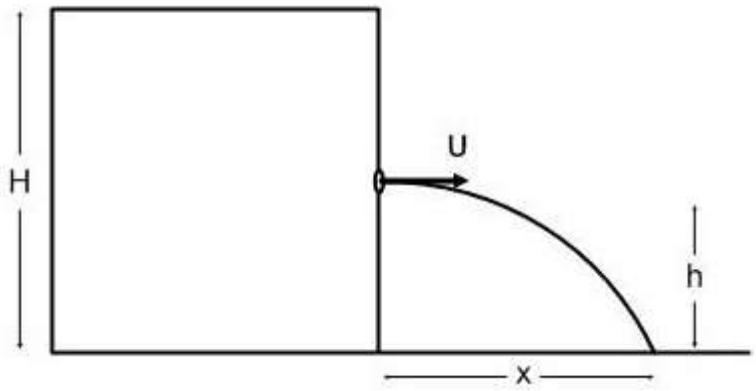
$\Pi_1 = A_1 \cdot \upsilon_1$ και $\Pi_2 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$

[$\upsilon_1 = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_1)}$ και $\upsilon_2 = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_2)}$]

$\Pi_1 = A_1 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_1)}$ και $\Pi_2 = A_2 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_2)}$,

διαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις :
$\Pi_1 / \Pi_2 = A_1 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_1)} / \{A_2 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_2)}\} \Rightarrow$
(ισχύει $h_2 = 4 \cdot h_1$ και $A_1 = 2 \cdot A_2$)
$\Pi_1 / \Pi_2 = A_1 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot h_1)} / \{A_2 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot 4 \cdot h_1)}\} \Rightarrow$
$\Pi_1 / \Pi_2 = 1 \Rightarrow$
$\Pi_1 = \Pi_2$, σωστή η επιλογή α .

2) Κυλινδρικό δοχείο ύψους Η είναι γεμάτο με υγρό που θεωρείται ιδανικό .

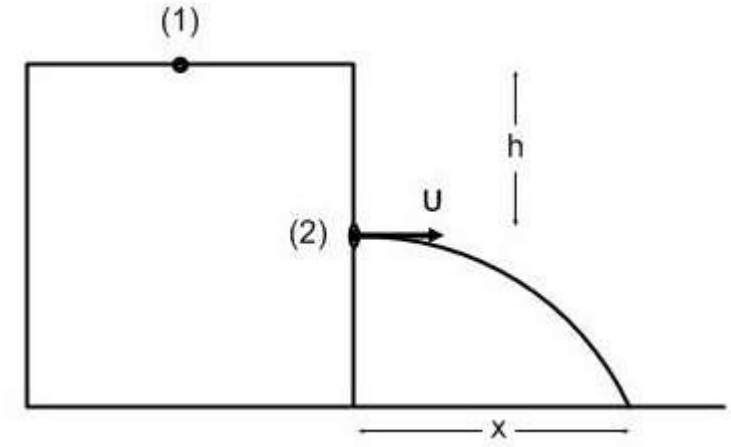


Σε ποιο ύψος από το έδαφος πρέπει να ανοίξουμε μια τρύπα έτσι ώστε το υγρό που εκρέει να φτάσει στην μέγιστη δυνατή απόσταση από την κατακόρυφο που περνάει από την οπή ;

Λύση

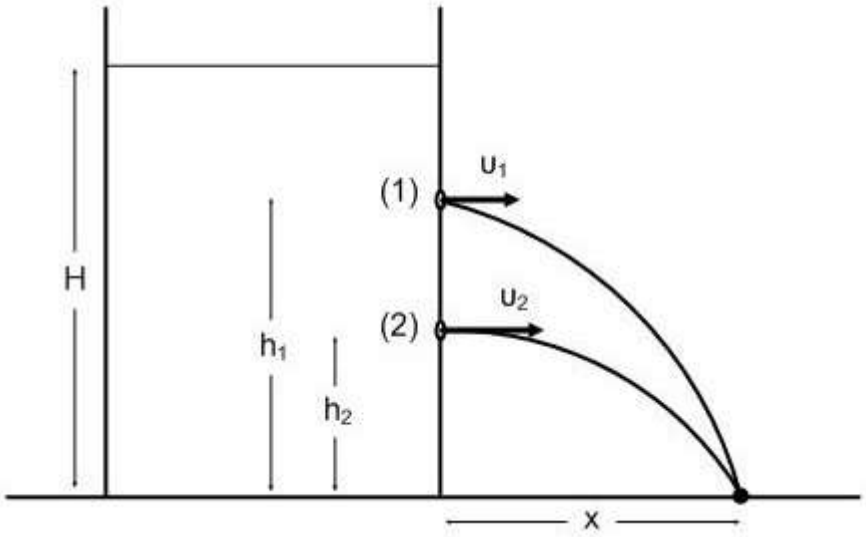
Το υγρό που εκρέει από την οπή έχει οριζόντια ταχύτητα υ και το υγρό εκτελεί οριζόντια βολή .
Άρα ισχύει :
$x = \upsilon \cdot t$
και
$h = ½ \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow$
$t = \sqrt{(2 \cdot h / g)}$.
Από το θεώρημα του Torricelli :
(Η απόδειξη του θεωρήματος του Torricelli βρίσκεται στο κάτω μέρος)
$\upsilon = \sqrt{[2 \cdot g \cdot (H - h)]}$.
Άρα :
$x = \upsilon \cdot t \Rightarrow$
$x = \sqrt{[2 \cdot g \cdot (H - h)]} \cdot \sqrt{(2 \cdot h / g)}$,
υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο :
$x^2 = 4 \cdot g \cdot (H - h) \cdot (h / g) \Rightarrow$
$x^2 = 4 \cdot (H - h) \cdot h \Rightarrow$
$x^2 = 4 \cdot H \cdot h - 4 \cdot h^2 \Rightarrow$
$4 \cdot h^2 - 4 \cdot H \cdot h + x^2 = 0$.
Για να λυθεί το τριώνυμο ως προς h πρέπει $\Delta \geq 0$, άρα :
$\beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma \geq 0 \Rightarrow$
$16 \cdot H^2 - 4 \cdot 4 \cdot x^2 \geq 0 \Rightarrow$
$16 \cdot x^2 \leq 16 \cdot H^2 \Rightarrow$
$x \leq H$.
Δηλαδή $x_{max} = H$.
Στο τριώνυμο $4 \cdot h^2 - 4 \cdot H \cdot h + x^2 = 0$ θέτουμε $x = x_{max} = H$:
$4 \cdot h^2 - 4 \cdot H \cdot h + H^2 = 0$.
$h_{1,2} = (4 \cdot H \pm \sqrt{\Delta}) / (2 \cdot 4)$.
Το $\Delta = 0$ για $x = H$,
$h_{1,2} = H / 2$.

Απόδειξη του θεωρήματος του Torricelli :



Για τα σημεία (1) και (2) εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli :
$P_1 + ½\cdot\rho_υ\cdot υ_1^2 + \rho_υ\cdot g\cdot h = P_2 + ½\cdot\rho_υ\cdot υ_2^2$.
Από την εξίσωση της συνέχειας :
$A_1\cdot υ_1 = A_2\cdot υ_2 \Rightarrow$
$υ_1^2 = (A_2^2 / A_1^2)\cdot υ_2^2$.
Επειδή $A_2^2 / A_1^2 << 1$ το $υ_1^2 << 1$ και μπορεί να παραληφθεί .
Επίσης $P_1 = P_2 = P_{at}$,
Άρα :
$\rho_υ\cdot g\cdot h = ½\cdot\rho_υ\cdot υ_2^2 \Rightarrow$
$υ_2 = \sqrt{(2\cdot g\cdot h)}$.

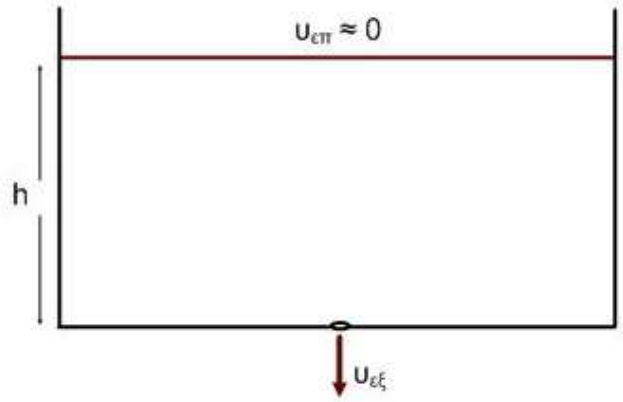
3) Κυλινδρικό δοχείο ύψους Η είναι γεμάτο με υγρό . Στην ίδια κατακόρυφο της πλευρικής κυλινδρικής επιφάνειας ανοίγουμε δύο τρύπες που απέχουν από το έδαφος αποστάσεις h_1 και h_2 έτσι ώστε το υγρό από τις δύο τρύπες να πέφτει στο ίδιο σημείο του εδάφους ;
Δίνεται $g = 10\ m / s^2$.
Λύση



Για το υγρό που εκρέει από την τρύπα (1) έχουμε :
$x = υ_1\cdot t_1$ … (I) ,
και
$h_1 = ½\cdot g\cdot t_1^2 \Rightarrow$
$t_1 = \sqrt{(2\cdot h_1 / g)}$ … (II) .
Από το θεώρημα του Torricelli , έχουμε :
$υ_1 = \sqrt{[2\cdot g\cdot(H - h_1)]}$ … (III) .
Από την εξίσωση (I) με την βοήθεια των (II) και (III) :
$x = \sqrt{[2\cdot g\cdot(H - h_1)]}\cdot\sqrt{(2\cdot h_1 / g)}$ … (IV) .
Ομοίως για το υγρό που εκρέει από την τρύπα (2) έχουμε :
$x = υ_2\cdot t_2$, $t_2 = \sqrt{(2\cdot h_2 / g)}$ και $υ_2 = \sqrt{[2\cdot g\cdot(H - h_2)]}$.

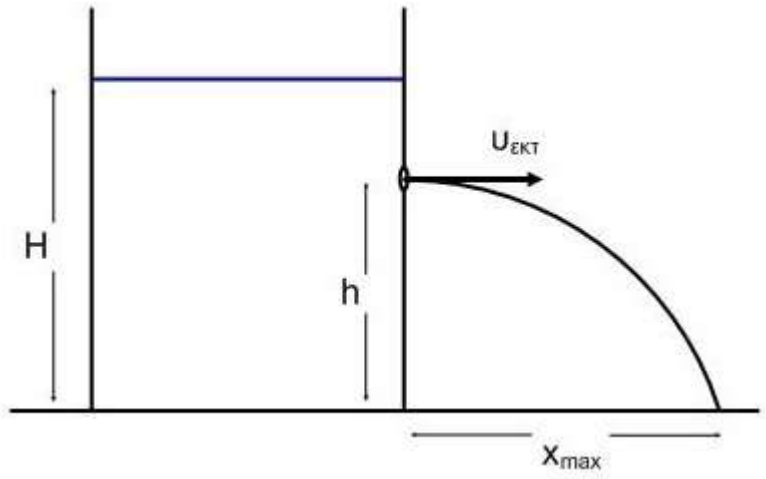
επομένως
$x = \sqrt{[2 \cdot g \cdot (H - h_2)]} \cdot \sqrt{(2 \cdot h_2 / g)}$ … (V) .
Από τις εξισώσεις (IV) και (V) , τα πρώτα μέλη είναι ίσα , άρα :
$\sqrt{[2 \cdot g \cdot (H - h_1)]} \cdot \sqrt{(2 \cdot h_1 / g)} = \sqrt{[2 \cdot g \cdot (H - h_2)]} \cdot \sqrt{(2 \cdot h_2 / g)} \Rightarrow$
υψώνουμε στο τετράγωνο και κάνουν απλοποιήσεις , οπότε :
$(H - h_1) \cdot h_1 = (H - h_2) \cdot h_2 \Rightarrow$
$H \cdot h_1 - h_1^2 = H \cdot h_2 - h_2^2 \Rightarrow$
$H \cdot h_1 - H \cdot h_2 = h_1^2 - h_2^2 \Rightarrow$
$H \cdot (h_1 - h_2) = (h_1 - h_2) \cdot (h_1 + h_2) \Rightarrow$
αν $h_1 \neq h_2$,
$h_1 + h_2 = H$.

4) Στον πυθμένα βαρελιού είναι ανοιγμένη μια οπή από την οποία ρέει κρασί με ταχύτητα 6,0 m / s .
Αν η ελεύθερη επιφάνεια του κρασιού κατέρχεται με σχεδόν μηδενική ταχύτητα ποιο είναι το ύψος του βαρελιού ;
Δίνεται $g = 10 \text{ m / s}^2$.
Λύση



Από το θεώρημα του Torricelli :
$\upsilon_{\varepsilon\xi} = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h)} \Rightarrow$
$\upsilon_{\varepsilon\xi}^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$
$h = \upsilon_{\varepsilon\xi}^2 / (2 \cdot g) \Rightarrow$
$h = 6^2 / (2 \cdot 10) \Rightarrow$
$h = 36 / 20 \Rightarrow$
$h = 18 / 10 \Rightarrow$
$h = 1{,}8 \text{ m}$.

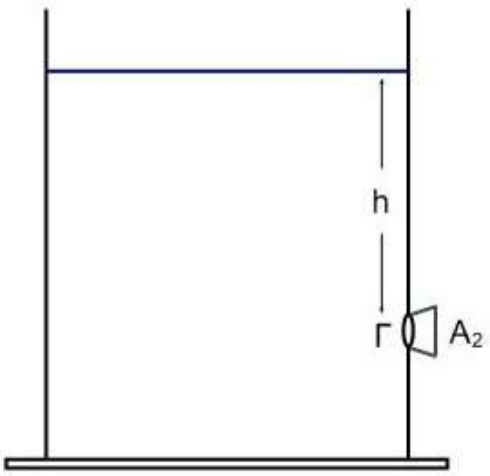
5) Δοχείο είναι γεμάτο νερό μέχρι ύψους H και βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι .
Βρείτε σε ποιο ύψος από το τραπέζι , πρέπει να ανοίξουμε μικρή τρύπα στο δοχείο , ώστε το νερό που θα εκτοξευθεί να πέσει στην μέγιστη δυνατή απόσταση πάνω στο τραπέζι .
Πόση είναι αυτή η μέγιστη απόσταση ;
Λύση



Ισχύει :
$x = \upsilon_{\varepsilon\kappa} \cdot \Delta t$,
$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{(2 \cdot h / g)}$,
θεώρημα Torricelli : $\upsilon_{\varepsilon\kappa} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}$,
από τις παραπάνω σχέσεις :
$x^2 = 2 \cdot g \cdot (H - h) \cdot (2 \cdot h / g) \Rightarrow$
$x^2 = 4 \cdot H \cdot h - 4 \cdot h^2 \Rightarrow$
$4 \cdot h^2 - 4 \cdot H \cdot h + x^2 = 0$.
Πρέπει η διακρίνουσα $\Delta' \geq 0 \Rightarrow$
$4 \cdot h^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0 \Rightarrow$
$x \leq H \Rightarrow$
$x_{max} = H$.
Τότε :
$\Delta' = 0$ και
$h = 4 \cdot H / 8 \Rightarrow$
$h = H / 2$.

6) Ένα δοχείο είναι κυλινδρικό και έχει εμβαδόν διατομής 0,010 m^2 .
Ενώ στο δοχείο εισέρχεται νερό με ρυθμό $2{,}0 \cdot 10^{-4}$ m^3 / s , στο πυθμένα του έχει ανοιχθεί μια τρύπα διατομής 1,0 cm^2 .
Να αποδείξετε ότι η στάθμη του νερού στο δοχείο θα αυξάνεται μέχρι ενός ύψους στο οποίο πλέον θα διατηρηθεί .
Επίσης να υπολογίσετε το ύψος αυτό .
Είναι $g = 10$ m / s^2 .
Λύση
Δίνονται $A_1 = 100 \cdot 10^{-4}$ m^2 , $\Pi_{\varepsilon\iota\sigma} = 2 \cdot 10^{-4}$ m^3 / s και $A_2 = 10^{-4}$ m^2 .
Έστω ότι το δοχείο είναι αρχικά άδειο οπότε $\upsilon_{\varepsilon\kappa\rho} = \upsilon_2 = 0$.
Οπότε ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού στο δοχείο , είναι :
$dV / dt = \Pi_{\varepsilon\iota\sigma} - A_2 \cdot \upsilon_2$,
εφόσον η υ_2 είναι αρχικά μηδέν , το δοχείο αρχίζει να γεμίζει $[dV / dt = A_1 \cdot (dH / dt) > 0]$.
Η αύξηση της στάθμης του νερού , του Η , προκαλεί και αύξηση της υ_2 μέχρι $\Pi_{\varepsilon\iota\sigma} - A_2 \cdot \upsilon_2 = 0$, οπότε $dH / dt = 0$ τότε η υ_2 δεν μπορεί να αυξηθεί άλλο και το Η = σταθερό .
Τελικά :
$\Pi_{\varepsilon\iota\sigma} = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow$
από το θεώρημα του Torricelli : $\upsilon_2 = \sqrt{(2 \cdot g \cdot H)}$,
$\Pi_{\varepsilon\iota\sigma} = A_2 \cdot \sqrt{(2 \cdot g \cdot H)} \Rightarrow$
$\Pi_{\varepsilon\iota\sigma}^2 = A_2^2 \cdot 2 \cdot g \cdot H \Rightarrow$
$H = [1 / (2 \cdot g)] \cdot (\Pi_{\varepsilon\iota\sigma}^2 / A_2^2) \Rightarrow$
$H = 20$ cm .

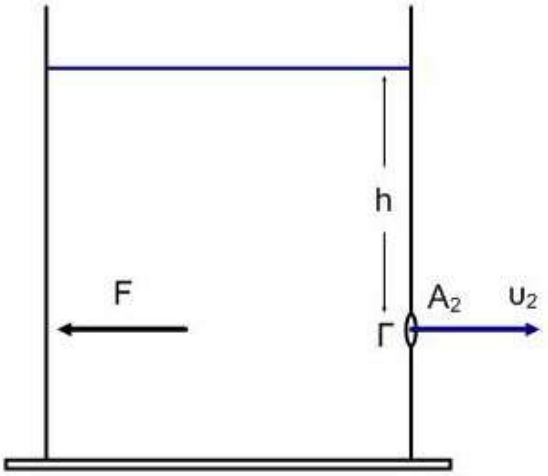
7)Στο δοχείο που φαίνεται στην εικόνα , περιέχεται υγρό αρχικής μάζας Μ και πυκνότητας ρ . Σε βάθος h υπάρχει τρύπα διατομής A_2 (πολύ μικρότερης από το εμβαδό διατομής του δοχείου) στην οποία υπάρχει ένας φελλός , ώστε να συγκρατείται το υγρό .
Η μάζα του δοχείου είναι m . Το δοχείο βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο .



Ξαφνικά ο φελλός εκτινάσσεται με αποτέλεσμα να αρχίσει η ροή υγρού από την τρύπα .
Ποια είναι η αρχική επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το δοχείο ;
Δίνονται τα : A_2 , ρ , h και g , M και m .

Λύση

Ελάχιστα πριν εκτιναχθεί ο φελλός που βρίσκεται στο σημείο Γ , θεωρούμε ποσότητα μάζας Δm σε επαφή με τον φελλό . Αφού ο φελλός δεν έχει ακόμα εκτιναχθεί , η Δm ποσότητα μάζας έχει ταχύτητα μηδέν .
Ο φελλός εκτινάσσεται και θεωρούμε $υ_2$ την ταχύτητα της μάζας Δm με την οποία βγαίνει από την τρύπα .



Επομένως η μεταβολή της ορμής της στην οριζόντια διεύθυνση θα είναι $ΔP = Δm·υ_2$, σύμφωνα με το θεώρημα μεταβολής της ορμής η δύναμη που εξασκείται στη μάζα Δm από το υπόλοιπο υγρό και κατά επέκταση από το τοίχωμα του δοχείου που βρίσκεται απέναντι από την τρύπα είναι :

$F = ΔP / Δt ⇒$

$F = Δm·υ_2 / Δt ⇒$

$F = ρ·(ΔV / Δt)·υ_2 ⇒$

η παροχή ορίζεται : $Π = ΔV / Δt$,

$F = ρ·Π·υ_2 ⇒$

όπου $Π = A_2·υ_2$,

$F = ρ·A_2·υ_2^2$.

Από το θεώρημα του Torricelli για το σημείο Γ :

$υ_2 = √(2·g·h)$.

Άρα :

$F = ρ·A_2·υ_2^2 ⇒$

$F = ρ·A_2·(2·g·h) ⇒$

$F = 2·ρ·A_2·g·h$.

Σύμφωνα με το αξίωμα δράσης – αντίδρασης και το νερό , μάζας Δm , καθώς εκτοξεύεται από την τρύπα εξασκεί πάνω στο τοίχωμα δύναμη αντίθετη από την F , οπότε το σύστημα θα αποκτήσει μια αρχική επιτάχυνση α :

$α = F / (M + m) ⇒$

$α = (2·ρ·A_2·g·h) / (M + m)$, με φορά προς τα αριστερά .