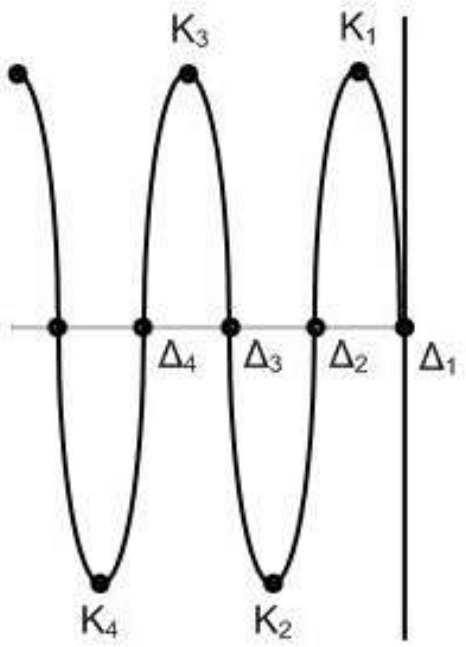
**1)** Ένα κύμα συχνότητας f = 500 Hz διαδίδεται με ταχύτητα υ = 360 m / s .
**α.** Πόσο απέχουν δύο σημεία κατά μήκος μιας ακτίνας διάδοσης του κύματος , τα οποία παρουσιάζουν διαφορά φάσης Δφ = π / 3 ;
**β.** Αν το κύμα , λόγω συμβολής με άλλο όμοιο , που διαδίδεται σε αντίθετη κατεύθυνση , δώσει στάσιμο , πόσο νομίζετε ότι θα απέχουν δύο διαδοχικοί δεσμοί ;
**Λύση**
**α.**
Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής :
$\upsilon = \lambda \cdot f \Rightarrow$
$\lambda = \upsilon / f \Rightarrow$
$\lambda = 360 / 500 \Rightarrow$
$\lambda = 0,72$ m .
Η διαφορά φάσης δύο σημείων του μέσου διάδοσης του κύματος , την ίδια χρονική στιγμή :
$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot (\Delta x / \lambda) \Rightarrow$
$\Delta x = \Delta\varphi \cdot \lambda / (2 \cdot \pi) \Rightarrow$
$\Delta x = (\pi / 3) \cdot 0,72 / (2 \cdot \pi) \Rightarrow$
$\Delta x = 0,12$ m .
**β.**
Σε ένα στάσιμο κύμα , δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν :
(όπως και δύο κοιλίες)
$\Delta x' = \lambda / 2 \Rightarrow$
$\Delta x' = 0,72 / 2 \Rightarrow$
$\Delta x' = 0,36$ m .

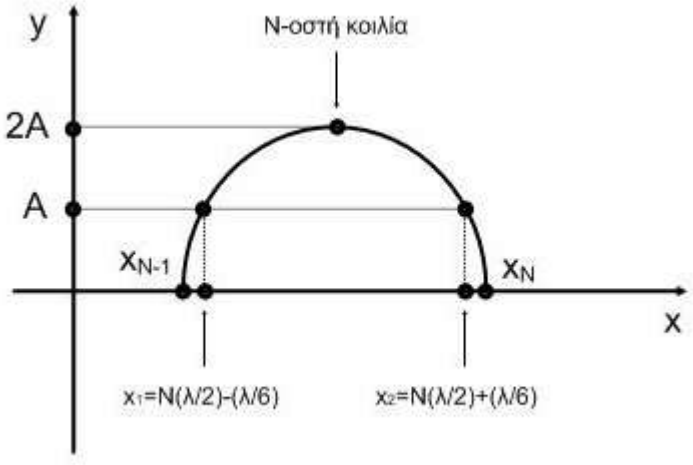
**2)** Ένα εγκάρσιο κύμα συχνότητας f = 850 Hz διαδίδεται οριζόντια με ταχύτητα υ . Το κύμα προσπίπτει σε κατακόρυφο τοίχο , οπότε ανακλάται σχηματίζοντας έτσι στάσιμο κύμα .
Αν η πρώτη κοιλία (από τον τοίχο) απέχει από τον τέταρτο δεσμό απόσταση d = 0,5 cm να βρείτε την ταχύτητα του τρέχοντος κύματος .
**Λύση**




Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος :
κοιλία από διαδοχικό δεσμό απέχει : $(K_1\Delta_2) = \lambda / 4$ .
δεσμός από διαδοχικό δεσμό απέχει : $(\Delta_2\Delta_3) = (\Delta_3\Delta_4) = \lambda / 2$ .
Η απόσταση της πρώτης κοιλίας $K_1$ από τον τέταρτο δεσμό $\Delta_4$ απέχει :
$d = (K_1\Delta_2) + (\Delta_2\Delta_3) + (\Delta_3\Delta_4) \Rightarrow$
$d = (\lambda / 4) + (\lambda / 2) + (\lambda / 2) \Rightarrow$
$d = (\lambda / 4) + 2 \cdot (\lambda / 2) \Rightarrow$
$d = (\lambda / 4) + \lambda \Rightarrow$

$d = 5 \cdot \lambda / 4 \Rightarrow$
$\lambda = 4 \cdot d / 5 \Rightarrow$
$\lambda = 4 \cdot 0,5 / 5 \Rightarrow$
$\lambda = 0,4$ m .
Η βασική κυματική εξίσωση :
$\upsilon = \lambda \cdot f \Rightarrow$
$\upsilon = 0,4 \cdot 850 \Rightarrow$
$\upsilon = 340$ m / s .

**3)** Στάσιμο κύμα περιγράφεται από τη συνάρτηση :
$y = 2 \cdot A \cdot \text{συν} (2 \cdot \pi \cdot x / \lambda) \cdot \text{ημ} (2 \cdot \pi \cdot t / T)$ .
Ένα σημείο Κ του μέσου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α . Δείξτε ότι η ελάχιστη απόσταση του Κ από ένα δεσμό είναι $\lambda / 12$ .
**Λύση**
Για τα σημεία που έχουν πλάτος ταλάντωσης Α ισχύει :
$A' = 2 \cdot A \cdot |\text{συν} (2 \cdot \pi \cdot x / \lambda)| \Rightarrow$
$A = 2 \cdot A \cdot |\text{συν} (2 \cdot \pi \cdot x / \lambda)| \Rightarrow$
$\text{συν} (2 \cdot \pi \cdot x / \lambda) = \pm ½ \Rightarrow$
$(2 \cdot \pi \cdot x / \lambda) = N \cdot \pi \pm (\pi / 3) \Rightarrow$
$x = N \cdot (\lambda / 2) \pm (\lambda / 6)$ ,
Ο Ν-οστός δεσμός έχει συντεταγμένη :
$x_N = (2 \cdot N + 1) \cdot (\lambda / 4) \Rightarrow$
$x_N = N \cdot (\lambda / 2) + (\lambda / 4)$ .
Ισχύει :
$d = x_N - x = [N \cdot (\lambda / 2) + (\lambda / 4)] - [N \cdot (\lambda / 2) \pm (\lambda / 6)] \Rightarrow$
$d = x_N - x = (\lambda / 4) \pm (\lambda / 6)$ .
Η ελάχιστη απόσταση είναι :
$d_{min} = (\lambda / 4) - (\lambda / 6) \Rightarrow$
$d_{min} = (3 \cdot \lambda / 12) - (2 \cdot \lambda / 12) \Rightarrow$
$d_{min} = \lambda / 12$ .
**2ος τρόπος**
Φτιάχνουμε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μια χρονική στιγμή που όσα σημεία ταλαντώνεται βρίσκονται στην μέγιστη απομάκρυνση τους .
Για τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ του N – 1 και N δεσμού :




$d_{min} = x_1 - x_{N-1} \Rightarrow$
$d_{min} = [N \cdot (\lambda / 2) - (\lambda / 6)] - [2 \cdot (N - 1) + 1] \cdot (\lambda / 4) \Rightarrow$
$d_{min} = [N \cdot (\lambda / 2) - (\lambda / 6)] - (2 \cdot N - 1) \cdot (\lambda / 4) \Rightarrow$
$d_{min} = N \cdot (\lambda / 2) - (\lambda / 6) - N \cdot (\lambda / 2) + (\lambda / 4) \Rightarrow$
$d_{min} = (\lambda / 4) - (\lambda / 6) \Rightarrow$
$d_{min} = \lambda / 12$ .

**4)** Δύο κύματα που περιγράφονται στο (S.I.) από τις συναρτήσεις :
$y_1 = 0,12 \cdot ημ [4 \cdot π \cdot t – (5 \cdot π \cdot x / 3)]$ και $y_2 = 0,12 \cdot ημ [4 \cdot π \cdot t + (5 \cdot π \cdot x /3)]$ ,
διαδίδονται κατά μήκος του άξονα x και από τη συμβολή τους προκύπτει στάσιμο κύμα.
**α.** Να δοθεί η y = f(t,x) για το στάσιμο κύμα ,
**β.** Θεωρούμε ένα σημείο Μ του ημιάξονα Ox όπου υπάρχει η 4η κοιλία από το Ο, συμπεριλαμβανομένης και αυτής στο Ο. Να βρεθεί η απόσταση ΟΜ και ο αριθμός των δεσμών μεταξύ Ο και Μ ,
**γ.** Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης σημείου Ν του Ox με $x_N = 0,15$ m . Ποια σημεία μεταξύ Ο και Μ ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος ;
**δ.** Να βρεθεί η απομάκρυνση του Ν τη στιγμή t = (65 / 16) s ,
**ε.** Ποιες χρονικές στιγμές η απομάκρυνση του Ν είναι y = 0,12 m ;

**Λύση**

**α.**
Τα κύματα που συμβάλουν είναι :
$y_1 = 0,12 \cdot ημ [4 \cdot π \cdot t – (5 \cdot π \cdot x / 3)]$ και $y_2 = 0,12 \cdot ημ [4 \cdot π \cdot t + (5 \cdot π \cdot x /3)]$ ,
Αν αντιστοιχίσουμε το $y_1$ με την εξίσωση κύματος :
$y_1 = A \cdot ημ [(2 \cdot π \cdot t / T) – (2 \cdot π \cdot x / λ)]$ ,
θα έχουμε :
$(2 \cdot π \cdot t / T) = 4 \cdot π \cdot t \Rightarrow$
T = ½ s .
Και
$(2 \cdot π \cdot x / λ) = (5 \cdot π \cdot x / 3) \Rightarrow$
$λ = 6 / 5 \Rightarrow$
λ = 1,2 m .
Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι :
$y = 2 \cdot A \cdot συν (2 \cdot π \cdot x / λ) \cdot ημ (2 \cdot π \cdot t / T) \Rightarrow$
με αντικατάσταση έχουμε :
$y = 0,24 \cdot συν [5 \cdot π / 3) \cdot x] \cdot ημ (4 \cdot π \cdot t)$ , (S.I.) .

**β.**
Τα σημεία στα οποία βρίσκονται κοιλίες στον ημιάξονα Ox δίνονται από την σχέση :
$x_κ = N \cdot (λ / 2)$ , με N = 0 , 1 , 2 , 3 , …
η 4η κοιλία είναι για N = 3 :
$x_M = 3 \cdot (λ / 2) \Rightarrow$
$x_M = 3 \cdot (1,2 / 2) \Rightarrow$
$x_M = 1,8$ m .
Η σχέση που δίνει τους δεσμούς είναι :
$x_Δ = (2 \cdot N + 1) \cdot (λ / 4) \Rightarrow$
$x_Δ = (2 \cdot N + 1) \cdot 0,3$ .
Πρέπει :
$0 < (2 \cdot N + 1) \cdot 0,3 < 1,8 \Rightarrow$
$(- 0,3) < 0,6 \cdot N < 1,5 \Rightarrow$
$(- 0,5) < N < 2,5$ .
Άρα N = 0 , 1 , 2 επομένως υπάρχουν τρεις (3) δεσμοί .

**γ.**
Το πλάτος του στάσιμου :
$A' = 2 \cdot A \cdot |συν (2 \cdot π \cdot x / λ)| \Rightarrow$
για το σημείο Ν ,
$A_N' = 0,24 \cdot |συν [(5 \cdot π / 3) \cdot 0,15]| \Rightarrow$
$A_N' = 0,24 \cdot |συν (π / 4)| \Rightarrow$
$A_N' = 0,12 \cdot √2$ m .
Εύρεση των σημείων μεταξύ Ο και Μ που έχουν πλάτος $A' = 0,12 \cdot √2$ m :
$A' = 2 \cdot A \cdot |συν [(5 \cdot π / 3) \cdot x]| \Rightarrow$
$0,12 \cdot √2 = 2 \cdot 0,12 \cdot |συν [(5 \cdot π / 3) \cdot x]| \Rightarrow$
$|συν [(5 \cdot π / 3) \cdot x]| = √2 / 2 \Rightarrow$
$(5 \cdot π / 3) \cdot x = κ \cdot π \pm (π / 4) \Rightarrow$
$x = (3 / 5) \cdot κ \pm (3 / 20)$ .
Πρώτη ομάδα λύσεων για :

$x = (3 / 5)\cdot\kappa + (3 / 20)$ , πρέπει :
$0 < x < x_M \Rightarrow$
$0 < (3 / 5)\cdot\kappa + (3 / 20) < 1,8 \Rightarrow$
$(- 3 / 20) < (3 / 5)\cdot\kappa < 1,8 – (3 / 20) \Rightarrow$
$(- 1 / 4) < \kappa < 3 – (1 / 4) \Rightarrow$
$(- 0,25) < \kappa < 2,75$ , όπου $\kappa = 0 , 1 , 2$ .
Επομένως :
$\kappa = 0$ :
$x_1 = (3 / 5)\cdot 0 + (3 / 20) \Rightarrow$
$x_1 = 0,15$ m .
$\kappa = 1$ :
$x_2 = (3 / 5)\cdot 1 + (3 / 20) \Rightarrow$
$x_2 = 15 / 20 \Rightarrow$
$x_2 = 0,75$ m .
$\kappa = 2$ :
$x_3 = (3 / 5)\cdot 2 + (3 / 20) \Rightarrow$
$x_3 = 27 / 20 \Rightarrow$
$x_3 = 1,35$ m .
Δεύτερη ομάδα λύσεων για :
$x = (3 / 5)\cdot\kappa – (3 / 20)$ , πρέπει :
$0 < x < x_M \Rightarrow$
$0 < (3 / 5)\cdot\kappa – (3 / 20) < 1,8 \Rightarrow$
$3 / 20 < (3 / 5)\cdot\kappa < 1,8 + (3 / 20) \Rightarrow$
$1 / 4 < \kappa < 3 + (1 / 4)$ , όπου $\kappa = 1 , 2 , 3$ , επομένως ,
για $\kappa = 1$ :
$x_4 = (3 / 5)\cdot 1 – (3 / 20) \Rightarrow$
$x_4 = 9 / 20 \Rightarrow$
$x_4 = 0,45$ m .
για $\kappa = 2$ :
$x_5 = (3 / 5)\cdot 2 – (3 / 20) \Rightarrow$
$x_5 = 21 / 20 \Rightarrow$
$x_5 = 1,05$ m .
για $\kappa = 3$ :
$x_6 = (3 / 5)\cdot 3 – (3 / 20) \Rightarrow$
$x_6 = 33 / 20 \Rightarrow$
$x_6 = 1,65$ m .

**δ.**

$y = 0,24\cdot\sigma\upsilon\nu [(5\cdot\pi / 3)\cdot x]\cdot\eta\mu (4\cdot\pi\cdot t) \Rightarrow$
$x_N = 0,15$ m , $t_N = 65 / 16$ s ,
$y_N = 0,24\cdot\sigma\upsilon\nu [(5\cdot\pi / 3)\cdot 0,15]\cdot\eta\mu [4\cdot\pi\cdot(65 / 16)] \Rightarrow$
$y_N = 0,24\cdot\sigma\upsilon\nu (\pi / 4)\cdot\eta\mu (65\cdot\pi / 4) \Rightarrow$
$y_N = 0,24\cdot(\sqrt{2} / 2)\cdot\eta\mu [16\cdot\pi + (\pi / 4)] \Rightarrow$
$y_N = 0,24\cdot(\sqrt{2} / 2)\cdot(\sqrt{2} / 2) \Rightarrow$
$y_N = 0,12$ m .

**ε.**

Υπολογισμός των χρονικών στιγμών που το Ν έχει απομάκρυνση $y = 0,12$ m .
$y_N = 0,12\cdot\sqrt{2}\cdot\eta\mu (4\cdot\pi\cdot t) \Rightarrow$
$0,12 = 0,12\cdot\sqrt{2}\cdot\eta\mu (4\cdot\pi\cdot t) \Rightarrow$
$\eta\mu (4\cdot\pi\cdot t) = \sqrt{2} / 2 \Rightarrow$
$4\cdot\pi\cdot t = 2\cdot\kappa\cdot\pi + (\pi / 4)$ … (1) ,
$4\cdot\pi\cdot t = 2\cdot\kappa\cdot\pi + (3\cdot\pi / 4)$ … (2) .
Από την (1) έχουμε :
$t = (\kappa / 2) + (1 / 16) \Rightarrow$
$t = (8\cdot\kappa + 1) / 16$ .
Από την (2) έχουμε :
$t = (\kappa / 2) + (3 / 16) \Rightarrow$
$t = (8\cdot\kappa + 3) / 16$ .

**5)** Το άκρο Α μιας χορδής ΑΒ μήκους l = 0,9 m είναι ελεύθερο , ενώ το άκρο Β της χορδής είναι ακλόνητα στερεωμένο . Ένα αρμονικό κύμα πλάτους $y_0$ = 4 cm διαδίδεται με ταχύτητα υ = 4 m / sec από το άκρο Α προς το άκρο Β της χορδής , ανακλάται στο ανένδοτο άκρο Β και διαδίδεται προς την αντίθετη κατεύθυνση . Διαπιστώνεται ότι μεταξύ των άκρων Α και Β υπάρχουν τέσσερα σημεία της χορδής που παραμένουν συνεχώς ακίνητα.
Ζητούνται:
**α.** Να γραφούν οι εξισώσεις του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος καθώς και του στάσιμου κύματος που προκύπτει από την συμβολή των δύο αυτών κυμάτων.
**β.** Ποιων συχνοτήτων κύματα μπορούν να δημιουργήσουν στάσιμα κύματα πάνω στη χορδή ΑΒ;
Ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x = 0) να θεωρηθεί το άκρο Β της χορδής και ως αρχή των χρόνων (t = 0) η χρονική στιγμή κατά την οποία το κύμα φθάνει στο άκρο Β.
**Λύση**
**α.**

Το προσπίπτον κύμα περιγράφεται από την εξίσωση :
$y_1 = A\cdot$ημ $[(2\cdot\pi\cdot t / T) + (2\cdot\pi\cdot x / \lambda)$ ,
και το ανακλώμενο
$y_2 = -A\cdot$ημ $[(2\cdot\pi\cdot t / T) + (2\cdot\pi\cdot x / \lambda) \Rightarrow$
$y_2 = A\cdot$ημ $[(2\cdot\pi\cdot x / \lambda) - (2\cdot\pi\cdot t / T)$ .
Υπολογισμός του λ
Επειδή μεταξύ των Α και Β υπάρχουν 4 σημεία ακίνητα το μήκος είναι :
$l = N\cdot(\lambda / 2) + (\lambda / 4)$ ,
όπου N = 4 , το σημείο Α είναι κοιλία :
$0,9 = 2\cdot\lambda + (\lambda / 4) \Rightarrow$
$0,9 = 9\cdot\lambda / 4 \Rightarrow$
$10\cdot\lambda = 4 \Rightarrow$
λ = 0,4 m .
Η βασική εξίσωση της κυματικής :
$\upsilon_\kappa = \lambda\cdot f \Rightarrow$
$f = \upsilon_\kappa / \lambda \Rightarrow$
$f = 4 / 0,4 \Rightarrow$
f = 10 Hz .
Οι εξισώσεις είναι :
$y_1 = 0,04\cdot$ημ $(20\cdot\pi\cdot t + 5\cdot\pi\cdot x)$ , (S.I.) .
Και
$y_2 = 0,04\cdot$ημ $(5\cdot\pi\cdot x - 20\cdot\pi\cdot t)$ , (S.I.) .
Από την συμβολή δημιουργείται στάσιμο κύμα :
$y = y_1 + y_2$ , εφαρμόζουμε την
ημ Α + ημ Β = $2\cdot$συν $[(A - B) / 2]\cdot$ημ $[(A + B) / 2]$ , άρα :
$y = 0,04\cdot$ημ $(20\cdot\pi\cdot t + 5\cdot\pi\cdot x) + 0,04\cdot$ημ $(5\cdot\pi\cdot x - 20\cdot\pi\cdot t) \Rightarrow$
$y = 2\cdot0,04\cdot$συν $(20\cdot\pi\cdot t)\cdot$ημ $(5\cdot\pi\cdot x) \Rightarrow$
$y = 0,08\cdot$ημ $(5\cdot\pi\cdot x)\cdot$συν $(20\cdot\pi\cdot t)$ , (S.I.) .
Για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα σε όλο το μήκος της χορδής απαιτείται χρονικό διάστημα :
$\upsilon_\kappa = l / \Delta t \Rightarrow$
$\Delta t = l / \upsilon_\kappa \Rightarrow$
$\Delta t = 0,9 / 4 \Rightarrow$
$\Delta t = 0,225$ s .
Για $t < 0,225$ s έχουμε στάσιμο κύμα την χρονική στιγμή $t = x / \upsilon_\kappa$ , στο τμήμα από 0 έως x .

**β.**

Ισχύει :

$l = \kappa\cdot(\lambda / 2) + (\lambda / 4)$ με $\kappa = 0 , 1 , 2 , 3$ , άρα :

$l = (2\cdot\kappa + 1)\cdot\lambda / 4 \Rightarrow$

$\lambda = \upsilon_{\kappa} / f$ ,

$l = [(2\cdot\kappa + 1) / 4]\cdot(\upsilon_{\kappa} / f) \Rightarrow$

$f = [(2\cdot\kappa + 1) / 4]\cdot(\upsilon_{\kappa} / l) \Rightarrow$

$f = [(2\cdot\kappa + 1) / 4]\cdot(4 / 0,9) \Rightarrow$

$f = (2\cdot\kappa + 1)\cdot(10 / 9)$ , με $\kappa = 0 , 1 , 2 , 3$ .

Για $\kappa = 4$ βρίσκουμε $f = 10$ Hz (επαλήθευση).