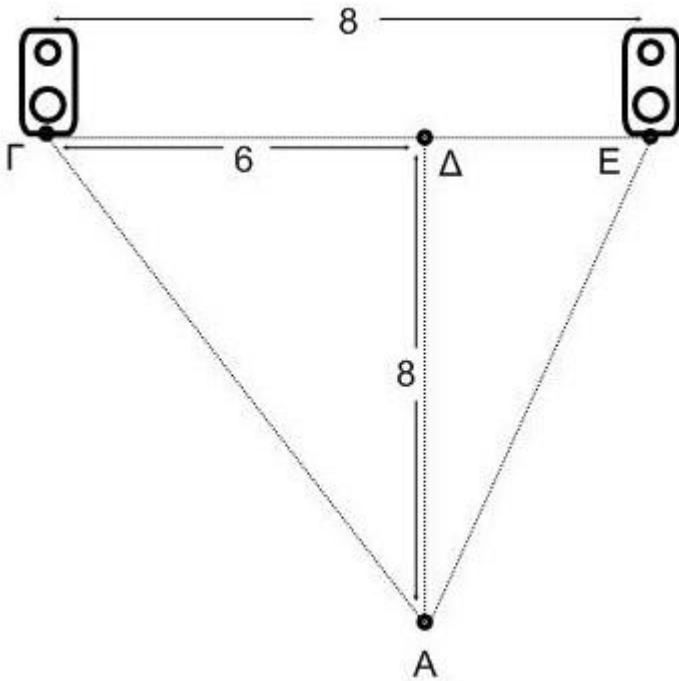
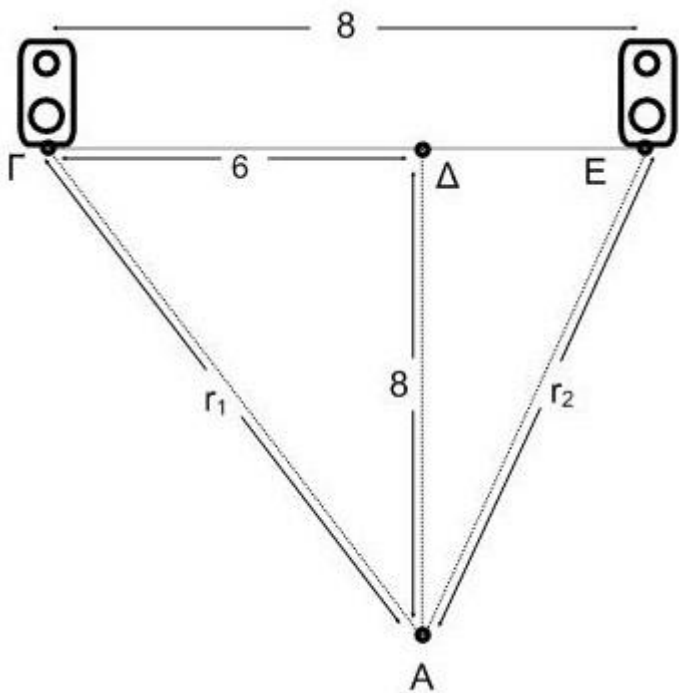


1)



Υποθέτουμε ότι δύο μικρά ηχεία τα οποία τροφοδοτούνται από τον ίδιο ενισχυτή είναι τοποθετημένα όπως φαίνεται στην εικόνα . Τα ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα ίδιας φάσης των οποίων η ταχύτητα είναι $v = 350 \text{ m / s}$. Για ποιες συχνότητες των εκπεμπόμενων κυμάτων ένας ακροατής στο σημείο Α θα αντιλαμβάνεται φαινόμενα αναιρετικής συμβολής και για ποιες θα αντιλαμβάνεται συμβολή ενισχυτική ;
Δίνεται $\sqrt{68} = 8,25$.

Λύση



Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΓΔ :

$$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} \Rightarrow$$

$$r_1 = \sqrt{36 + 64} \Rightarrow$$

$$r_1 = \sqrt{100} \Rightarrow$$

$$r_1 = 10 \text{ m} .$$

$$\text{Ισχύει } \Gamma\text{Ε} = \Gamma\Delta + \Delta\text{Ε} \Rightarrow$$

$$\Delta\text{Ε} = \Gamma\text{Ε} - \Gamma\Delta \Rightarrow$$

$$\Delta\text{Ε} = 8 - 6 \Rightarrow$$

$$\Delta\text{Ε} = 2 \text{ m} .$$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΕ :

$$r_2 = \sqrt{2^2 + 8^2} \Rightarrow$$

$$r_2 = \sqrt{4 + 64} \Rightarrow$$

$$r_2 = \sqrt{68} \Rightarrow$$

$$r_2 = 8,25 \text{ m} .$$

Η βασική εξίσωση της κυματικής :

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow$$

$$\lambda = v / f .$$

Για να έχουμε αναιρετική (αποσβεστική) συμβολή :

$$|r_1 - r_2| = (2 \cdot N + 1) \cdot (\lambda / 2) \Rightarrow$$

$$|r_1 - r_2| = (2 \cdot N + 1) \cdot [(v / f) / 2] \Rightarrow$$

$$|r_1 - r_2| = (2 \cdot N + 1) \cdot v / (2 \cdot f) \Rightarrow$$

$$f = (2 \cdot N + 1) \cdot v / [2 \cdot |r_1 - r_2|] \Rightarrow$$

$$f = (2 \cdot N + 1) \cdot 350 / [2 \cdot |10 - 8,25|] \Rightarrow$$

$$f = 100 \cdot (2 \cdot N + 1) .$$

Το N παίρνει τιμές 0, 1, 2, 3, ...

(οι τιμές -1, -2, -3, ... αφορούν συμμετρικές θέσεις του A ως προς τον άξονα ΓΕ και δεν είναι δεκτές) .

Για να έχουμε ενισχυτική συμβολή :

$$|r_1 - r_2| = N \cdot \lambda \Rightarrow$$

$$|r_1 - r_2| = N \cdot (v / f) \Rightarrow$$

$$f = N \cdot v / |r_1 - r_2| \Rightarrow$$

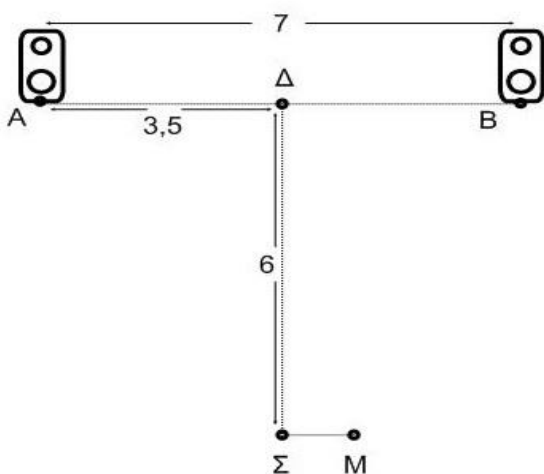
$$f = 350 \cdot N / |10 - 8,25| \Rightarrow$$

$$f = 200 \cdot N .$$

Το N παίρνει τιμές 0, 1, 2, 3, ...

(οι τιμές -1, -2, -3, ... αφορούν συμμετρικές θέσεις του A ως προς τον άξονα ΓΕ και δεν είναι δεκτές) .

2) Δύο ηχεία βρίσκονται σε δύο σημεία A και B, που απέχουν 7 m. Τα ηχεία τροφοδοτούνται από τον ίδιο ενισχυτή και εκπέμπουν ηχητικά κύματα ίδιας φάσης, τα οποία έχουν συχνότητα $f = 170 \text{ Hz}$ και διαδίδονται με ταχύτητα $v = 340 \text{ m/s}$.



α. Ποιο είναι το μήκος κύματος λ ;

β. Ένας μαθητής στέκεται στο σημείο Σ που ισαπέχει από τα δύο ηχεία και που η απόσταση του από την AB είναι 6 cm. Τι ακούει ο μαθητής ;

γ. Υποθέστε πως ο μαθητής μετακινείται κατά 1 m σε ένα άλλο σημείο M που απέχει πάλι 6 m από την AB. Τι ακούει στην περίπτωση αυτή ο μαθητής ;

Λύση

α.

Η βασική εξίσωση της κυματικής :

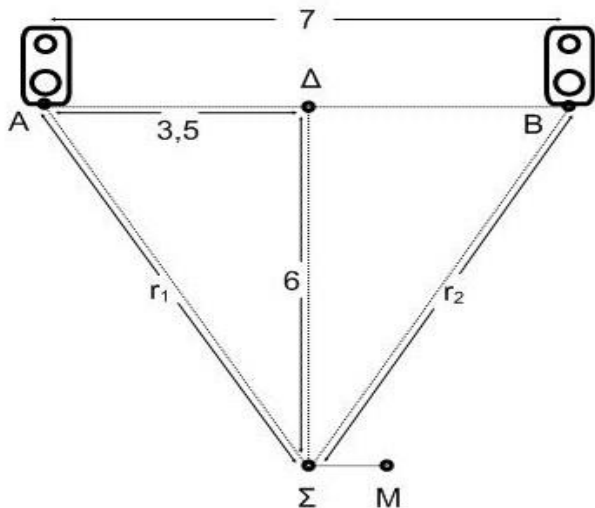
$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow$$

$$\lambda = v / f \Rightarrow$$

$$\lambda = 340 / 170 \Rightarrow$$

$$\lambda = 2 \text{ m} .$$

β.



Το σημείο Δ είναι το μέσο του AB , άρα :

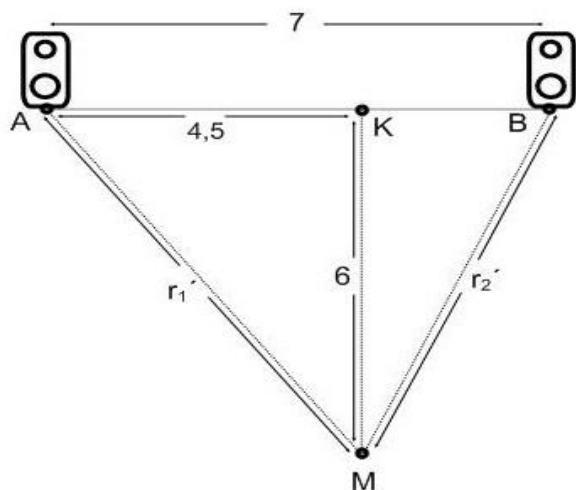
$$r_1 = AΣ = ΣB = r_2 .$$

Ισχύει λοιπόν $r_1 = r_2$.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΣ είναι η μεσοκάθετος του AB , το Σ είναι σημείο ενίσχυσης .

Ο μαθητής ακούει ενισχυτική συμβολή , πλάτους $A_Σ = 2 \cdot A$.

Υ.



Από το σημείο Σ ο μαθητής μετακινήθηκε στο σημείο Μ , κατά 1 m ,

$$AK = 3,5 + 1 = 4,5 \text{ m .}$$

$$KB = 3,5 - 1 = 2,5 \text{ m .}$$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο MAK :

$$r_1'^2 = AK^2 + KM^2 \Rightarrow$$

$$r_1' = \sqrt{AK^2 + KM^2} \Rightarrow$$

$$r_1' = \sqrt{4,5^2 + 6^2} \Rightarrow$$

$$r_1' = 7,5 \text{ m .}$$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο MKB :

$$r_2'^2 = KB^2 + KM^2 \Rightarrow$$

$$r_2' = \sqrt{KB^2 + KM^2} \Rightarrow$$

$$r_2' = \sqrt{2,5^2 + 6^2} \Rightarrow$$

$$r_2' = 6,5 \text{ m .}$$

Η διαφορά αποστάσεων των δυο κυμάτων είναι :

$$|r_1' - r_2'| = 7,5 - 6,5 = 1 \text{ m .}$$

Το πηλίκο :

$$|r_1' - r_2'| / \lambda = 1 / 2 \Rightarrow$$

$$|r_1' - r_2'| = \lambda / 2 .$$

Έχουμε αποσβεστική συμβολή με $N = 0$, άρα ο μαθητής δεν θα ακούει τίποτα .

3) Στα άκρα σύρματος μήκους 3,6 cm έχουν στερεωθεί δύο μικρές ακίδες A,B οι οποίες είναι ελάχιστα βυθισμένες σε υγρό.

Το σύρμα τίθεται σε ταλάντωση με συχνότητα 20 Hz οπότε κάθε ακίδα δημιουργεί κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα 24 cm / s . Να βρεθούν τα σημεία μεταξύ A,B που :

α. παραμένουν ακίνητα ,

β. πάλλονται με το μέγιστο πλάτος .

Λύση

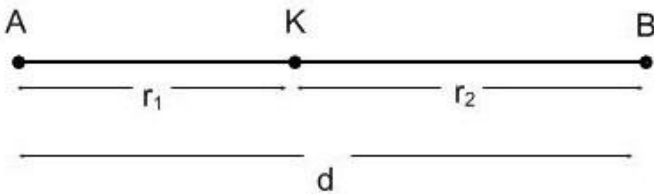
α.

$$v_k = \lambda \cdot f \Rightarrow$$

$$\lambda = v_k / f \Rightarrow$$

$$\lambda = 24 / 20 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1,2 \text{ cm} .$$



Το σημείο K παραμένει ακίνητο , επομένως :

$$r_1 - r_2 = (2 \cdot N + 1) \cdot (\lambda / 2) \dots (1) ,$$

και

$$r_1 + r_2 = d \dots (2) ,$$

προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) :

$$2 \cdot r_1 = (2 \cdot N + 1) \cdot (\lambda / 2) + d \Rightarrow$$

$$r_1 = (2 \cdot N + 1) \cdot (\lambda / 4) + (d / 2) .$$

Για την απόσταση r_1 ισχύει :

$$0 < r_1 < d \Rightarrow$$

$$0 < (2 \cdot N + 1) \cdot (\lambda / 4) + (d / 2) < d \Rightarrow$$

$$-(d / 2) < (2 \cdot N + 1) \cdot (\lambda / 4) < (d / 2) \Rightarrow$$

$$-1,8 < (2 \cdot N + 1) \cdot 0,3 < 1,8 \Rightarrow$$

$$-2,1 < 0,6 \cdot N < 1,5 \Rightarrow$$

$$-3,5 < N < 2,5 ,$$

$$\text{άρα } N = -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 .$$

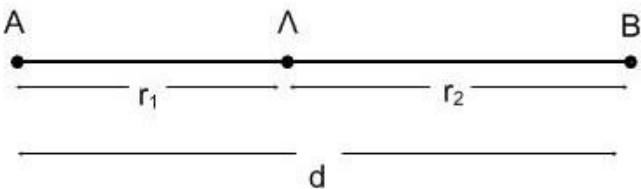
Όπου :

$$r_1 = (2 \cdot N + 1) \cdot 0,3 + 1,8 \Rightarrow$$

$$r_1 = 0,6 \cdot N + 2,1 , \text{ επομένως :}$$

$$x_1 = 0,3 \text{ cm} , x_2 = 0,9 \text{ cm} , x_3 = 1,5 \text{ cm} , x_4 = 2,1 \text{ cm} , x_5 = 2,7 \text{ cm} , x_6 = 3,3 \text{ cm} .$$

β.



Τα σημεία που μετά την συμβολή πάλλονται με μέγιστο πλάτος , ένα τέτοιο είναι το σημείο Λ , ικανοποιούν την σχέση :

$$r_1 - r_2 = N \cdot \lambda \dots (3) ,$$

και επίσης :

$$r_1 + r_2 = d \dots (4) .$$

Από την πρόσθεση των (3) και (4) , έχουμε :

$$2 \cdot r_1 = N \cdot \lambda + d \Rightarrow$$

$$r_1 = N \cdot (\lambda / 2) + (d / 2) .$$

Για το r_1 ισχύει :

$$0 < r_1 < d \Rightarrow$$

$$0 < N \cdot (\lambda / 2) + (d / 2) < d \Rightarrow$$

$$(-d / 2) < N \cdot (\lambda / 2) < (d / 2) \Rightarrow$$

$$1,8 < N \cdot 0,6 < 1,8 \Rightarrow$$

$$(-3) < N < 3, \text{ \acute{a}\rho\alpha } N = -2, -1, 0, 1, 2.$$

$$r_1 = N \cdot (\lambda / 2) + (d / 2) \Rightarrow$$

$$r_1 = N \cdot 0,6 + 1,8.$$

\u038c\u03c1\u03b1 :

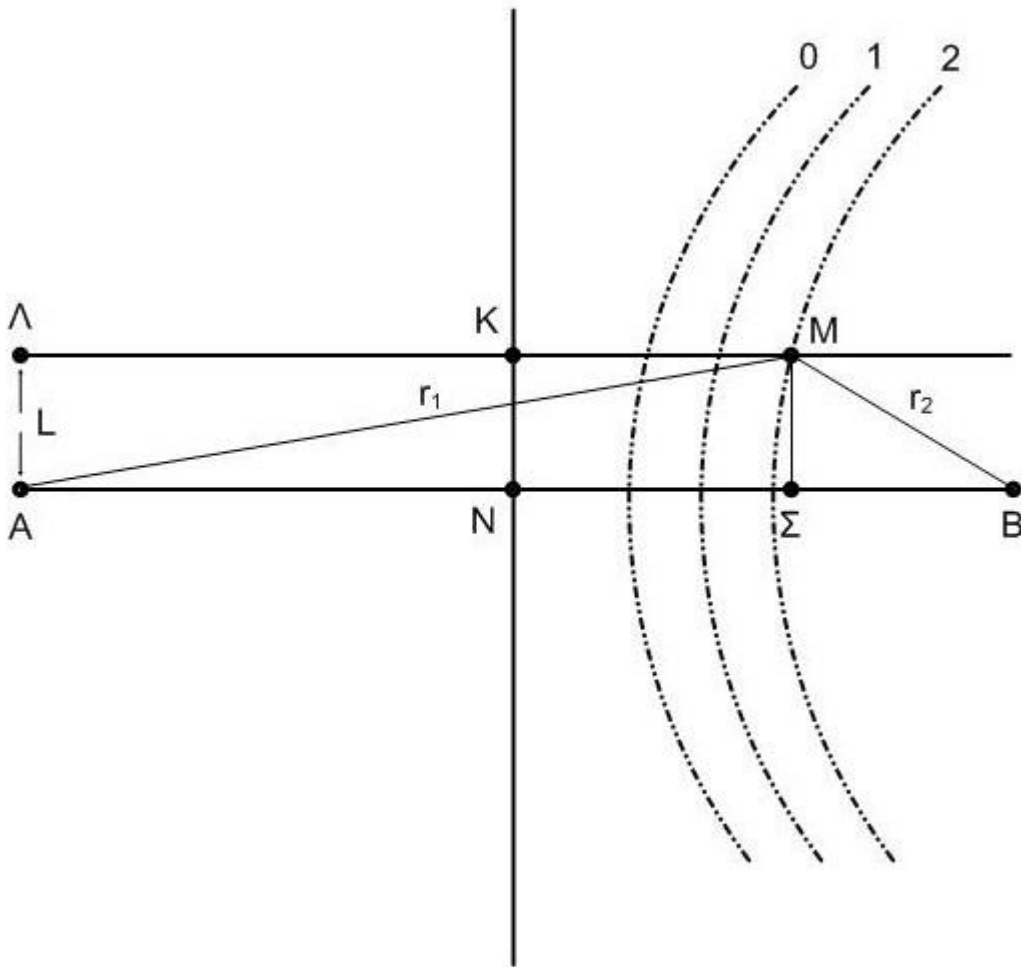
$$x_1 = 0,6 \text{ cm}, x_2 = 1,2 \text{ cm}, x_3 = 1,8 \text{ cm}, x_4 = 2,4 \text{ cm}, x_5 = 3 \text{ cm}.$$

4) \u03a3\u03c4\u03b7\u03bd \u03b5\u03c0\u03b9\u03c6\u03ac\u03bd\u03b5\u03b9\u03b1 \u03c5\u03b3\u03c1\u03cc\u03c5 \u03b4\u03b7\u03bc\u03b9\u03bf\u03c5\u03c1\u03b3\u03cc\u03bd \u03ba\u03cd\u03bc\u03b1\u03c4\u03b1 \u03b4\u03cd\u03bf \u03c0\u03b7\u03b3\u03b5\u03c3 \u0391, \u0392 \u03c0\u03bf\u03c5 \u03c4\u03b1\u03bb\u03b1\u03bd\u03c4\u03c9\u03bd\u03bf\u03bd\u03b1\u03b9 \u03bc\u03b5 \u03c4\u03bf \u03b9\u03b4\u03b9\u03bf \u03c0\u03bb\u03ac\u03c4\u03bf\u03c3, \u03c3\u03c7\u03bd\u03cc\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1 \u03ba\u03b1\u03b9 \u03c6\u03ac\u03c3\u03b7. \u038c\u03b9\u03bd\u03b5\u03b9 \u0391\u0392 = 12,5 cm. \u038c\u03b5\u03c7\u03b5\u03c1\u03cc\u03bc\u03b5 \u03bc\u03b9\u03b1 \u03b5\u03c5\u03b8\u03b5\u03b9\u03b1 \u03b5 \u03c3\u03c4\u03b7\u03bd \u03b5\u03c0\u03b9\u03c6\u03ac\u03bd\u03b5\u03b9\u03b1 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03c5\u03b3\u03c1\u03cc\u03c5 \u03c0\u03b1\u03c1\u03ac\u03bb\u03bb\u03b7 \u03c3\u03c4\u03bf \u0391\u0392 \u03c0\u03bf\u03c5 \u03b1\u03c0\u03b5\u03c7\u03b5\u03b9 6 cm \u03b1\u03c0\u03cc \u03b1\u03c5\u03c4\u03cc.

\u038c\u03bd\u03bf\u03bc\u03ac\u03b6\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u039a \u03c4\u03bf \u03c3\u03b7\u03bc\u03b5\u03b9\u03bf \u03c0\u03bf\u03c5 \u03c4\u03b5\u03bc\u03bd\u03b5\u03b9 \u03c4\u03b7\u03bd \u03b5 \u03b7 \u03bc\u03b5\u03c3\u03bf\u03ba\u03ac\u03b8\u03b5\u03c4\u03bf\u03c3 \u03c4\u03bf\u03c5 \u0391\u0392. \u038c\u03c3\u03c4\u03c9 \u039c \u03c4\u03bf \u03c3\u03bf \u03c3\u03b7\u03bc\u03b5\u03b9\u03bf \u03c4\u03b7\u03c3 \u03b5 \u03bc\u03b5\u03c4\u03ac \u03c4\u03bf \u039a \u03c3\u03c4\u03bf \u03cc\u03c0\u03b9\u03bf \u03b5\u03c7\u03c9\u03bc\u03b5 \u03b1\u03c0\u03cc\u03c3\u03b2\u03b5\u03c3\u03b7.

\u038c\u03bd \u039a\u039d = 1,75 cm \u03ba\u03b1\u03b9 \u03b7 \u03c4\u03b1\u03c7\u03cd\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1 \u03b4\u03b9\u03ac\u03b4\u03bf\u03c3\u03b7\u03c3 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03ba\u03cd\u03bc\u03b1\u03c4\u03bf\u03c3 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 4 cm / s \u03bd\u03b1 \u03b2\u03c1\u03b5\u03b8\u03b5\u03b9 \u03b7 \u03c3\u03c7\u03bd\u03cc\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1 \u03c4\u03b1\u03bb\u03b1\u03bd\u03c4\u03c9\u03c3\u03b7\u03c3 \u03c4\u03c9\u03bd \u03c0\u03b7\u03b3\u03b5\u03c3\u03c9\u03bd.

\u038c\u03bb\u03c5\u03c3\u03b7



\u03a0\u03c5\u03b8\u03b1\u03b3\u03cc\u03c1\u03b5\u03b9\u03bf \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1 :

$$r_1^2 = (A\u039b)^2 + (\u039bM)^2 \Rightarrow$$

$$r_1^2 = L^2 + \{[(AB) / 2] + (KM)\}^2 \Rightarrow$$

$$r_1^2 = 6^2 + (6,25 + 1,75)^2 \Rightarrow$$

$$r_1^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow$$

$$r_1 = 10 \text{ cm}.$$

\u03a0\u03c5\u03b8\u03b1\u03b3\u03cc\u03c1\u03b5\u03b9\u03bf \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1 :

$$r_2^2 = (M\u03a3)^2 + (\u03a3B)^2 \Rightarrow$$

$$r_2^2 = L^2 + \{[(AB) / 2] - (KM)\}^2 \Rightarrow$$

$$r_2^2 = 6^2 + (6,25 - 1,75)^2 \Rightarrow$$

$$r_2^2 = 6^2 + 4,5^2 \Rightarrow$$

$$r_2 = 7,5 \text{ cm}.$$

\u038c\u03b9\u03b1 \u03c4\u03bf \u03c3\u03b7\u03bc\u03b5\u03b9\u03bf \u039c \u03b9\u03c3\u03c7\u03cd\u03b5\u03b9 :

$$r_1 - r_2 = (2 \cdot N + 1) \cdot (\lambda / 2) \Rightarrow$$

$$v_k = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = v_k / f,$$

$$r_1 - r_2 = (2 \cdot N + 1) \cdot [v_k / (2 \cdot f)] \Rightarrow$$

$$f = [(2 \cdot N + 1) / (r_1 - r_2)] \cdot (v_k / 2) \Rightarrow$$

το $N = 0, 1, 2, \dots$, παίρνουμε την τιμή $N = 2$ (το 3ο σημείο),
 $f = [(2 \cdot 2 + 1) / (10 - 7,5)] \cdot (4 / 2) \Rightarrow$
 $f = 4 \text{ Hz}$.

5) Δύο πηγές κυμάτων A, B που βρίσκονται στην επιφάνεια υγρού ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος, συχνότητα και φάση. Θεωρούμε την μεσοκάθετο ευθεία ϵ του AB που χωρίζει την επιφάνεια του υγρού σε δύο ημιεπίπεδα. και δύο σημεία K, Λ της επιφάνειας του υγρού. Το K με το A και το Λ με το B βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.

α. Έστω ότι τα K, Λ ταλαντώνονται με το μέγιστο πλάτος και ότι άλλα επτά σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$ ταλαντώνονται με το μέγιστο πλάτος.

Να βρεθεί το μήκος κύματος των δύο κυμάτων αν :

$$(\Lambda A) - (\Lambda B) = 10 \text{ cm} \text{ και } (KB) - (KA) = 6 \text{ cm} .$$

β. Έστω ότι στα K, Λ έχουμε απόσβεση και ότι το ίδιο συμβαίνει για άλλα έξι σημεία του τμήματος $K\Lambda$.

Να βρεθεί το μήκος κύματος των δύο κυμάτων αν :

$$(\Lambda A) - (\Lambda B) = 9 \text{ cm} \text{ και } (KB) - (KA) = 5 \text{ cm} .$$

Λύση

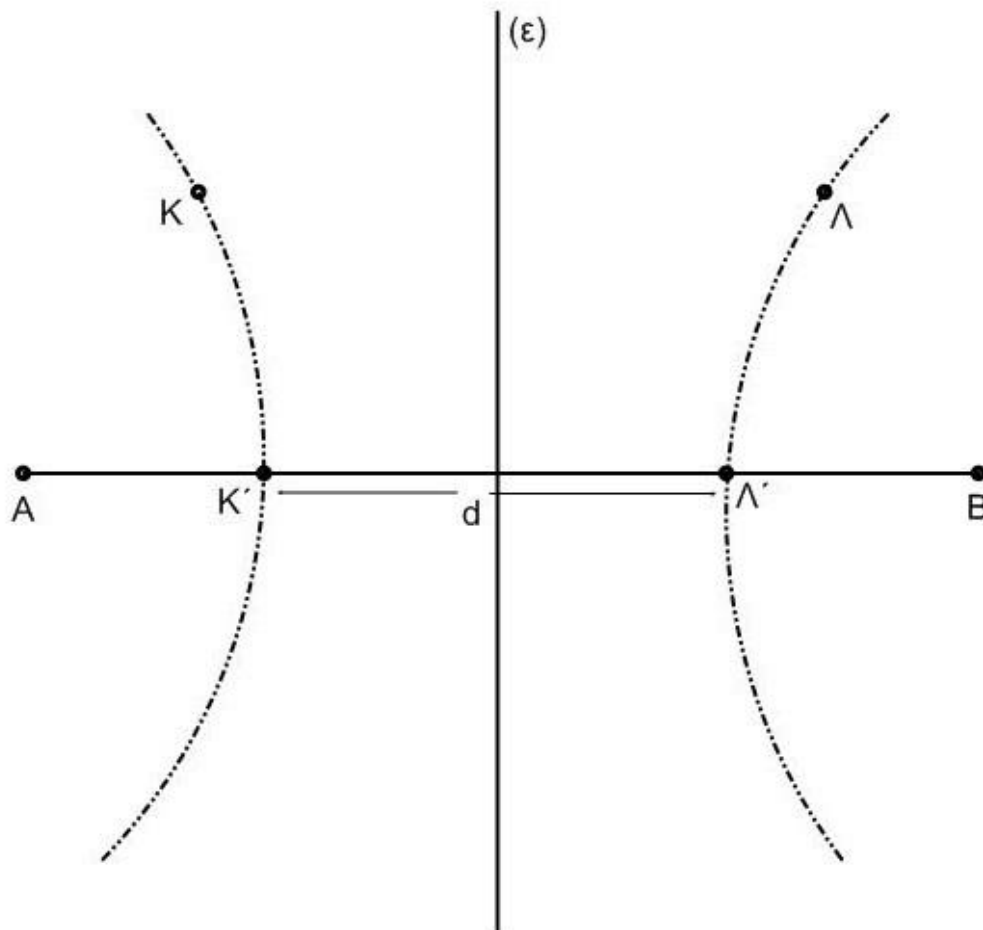
α.

Τα σημεία K και Λ ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος . Μεταξύ τους υπάρχουν άλλα 7 σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος .

Για τις αποστάσεις, έχουμε :

$$(\Lambda A) - (\Lambda B) = 10 \text{ cm} , (KB) - (KA) = 6 \text{ cm} ,$$

$$r_{1,\Lambda} - r_{2,\Lambda} = 10 \text{ cm} , r_{2,K} - r_{1,K} = 6 \text{ cm} .$$



Οι σχέσεις που ισχύουν για το K και Λ ισχύουν και για τα K' και Λ' που βρίσκονται πάνω στην AB που συνδέει τις δύο πηγές :

$$\Lambda'A - \Lambda'B = 10 \text{ cm} , K'B - K'A = 6 \text{ cm} ,$$

$$r_{1,\Lambda} - r_{2,\Lambda} = 10 \text{ cm} \dots (1) , r_{2,K} - r_{1,K} = 6 \text{ cm} \dots (2) .$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) :

$$r_{1,\Lambda} - r_{2,\Lambda} + r_{2,K} - r_{1,K} = 10 + 6 \Rightarrow$$

$$(r_{1,\Lambda} - r_{1,K}) + (r_{2,K} - r_{2,\Lambda}) = 16 \Rightarrow$$

$$d + d = 16 \Rightarrow$$

$$2 \cdot d = 16 \Rightarrow$$

$$d = 8 \text{ cm} .$$

Στην AB δημιουργείται στάσιμο κύμα και στην απόσταση d υπάρχουν 9 κοιλίες επομένως :

$$d = 8 \cdot (\lambda / 2) \Rightarrow$$

$$8 = 8 \cdot (\lambda / 2) \Rightarrow$$

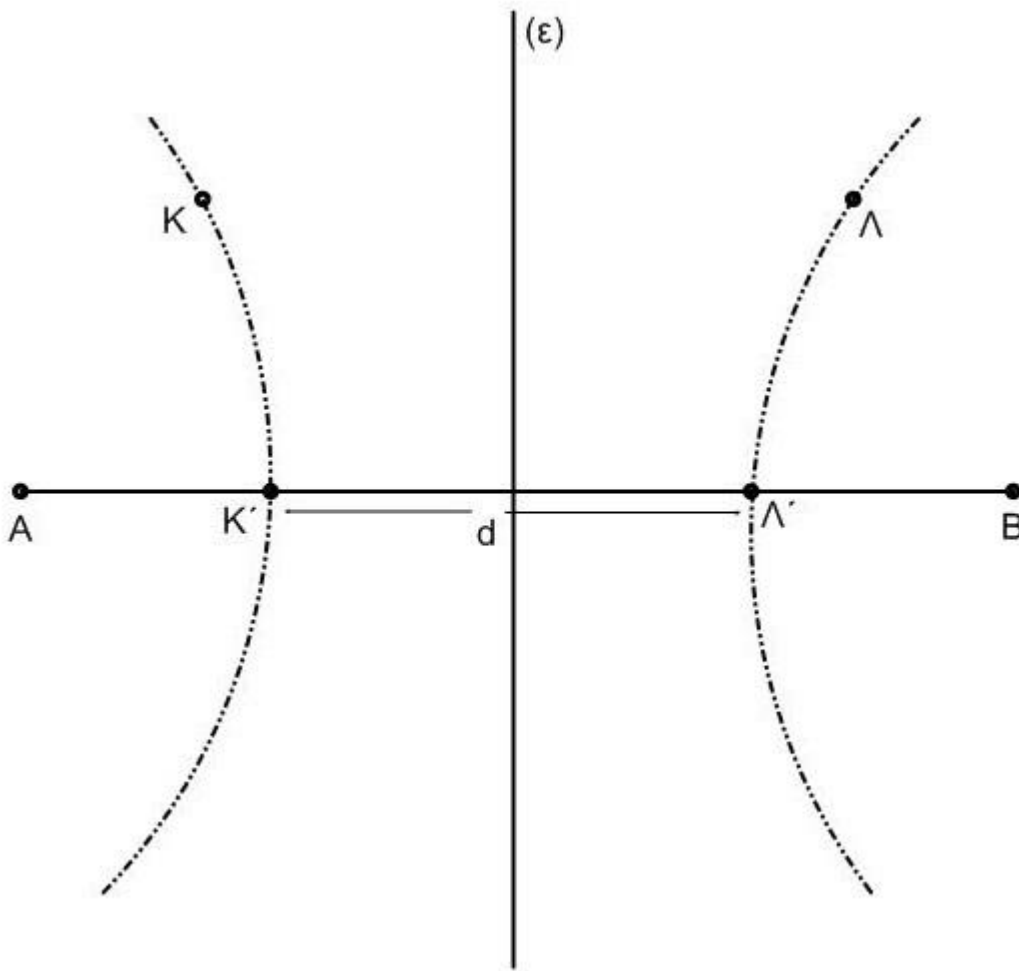
$$\lambda = 2 \text{ cm} .$$

β.

Στα σημεία K και Λ έχουμε απόσβεση και μεταξύ αυτών υπάρχουν άλλα έξι με μηδενικό πλάτος ταλάντωσης .

Για τις αποστάσεις :

(έχουμε το ίδιο σχήμα με το α)



$$\Lambda A - \Lambda B = 9 \text{ cm} \text{ και } K B - K A = 5 \text{ cm} ,$$

$$r_{1,\Lambda} - r_{2,\Lambda} = 9 \text{ cm} , r_{2,K} - r_{1,K} = 5 \text{ cm} .$$

Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και για τα σημεία K' , Λ' που οι υπερβολές που περνάνε από το K και Λ τέμνουν την AB που συνδέει τις πηγές :

$$\Lambda' A - \Lambda' B = 9 \text{ cm} , K' B - K' A = 5 \text{ cm} ,$$

$$r_{1,\Lambda'} - r_{2,\Lambda'} = 9 \text{ cm} \dots (3) , r_{2,K'} - r_{1,K'} = 5 \text{ cm} \dots (4) .$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (3) και (4) :

$$r_{1,\Lambda'} - r_{2,\Lambda'} + r_{2,K'} - r_{1,K'} = 9 + 5 \Rightarrow$$

$$(r_{1,\Lambda'} - r_{1,K'}) + (r_{2,K'} - r_{2,\Lambda'}) = 14 \Rightarrow$$

$$d + d = 14 \Rightarrow$$

$$2 \cdot d = 14 \Rightarrow$$

$$d = 7 \text{ cm} .$$

Η απόσταση d περιλαμβάνει 8 δεσμούς επομένως :

$$d = 7 \cdot (\lambda / 2) \Rightarrow$$

$$7 = 7 \cdot (\lambda / 2) \Rightarrow$$

$$\lambda = 2 \text{ cm} .$$